ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-ET-UNIÈME — ANNÉE 1944

(80e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1944

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-ET-UNIÈME — ANNÉE 1944

(80e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1944

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : M. ÉTIENNE THOUZELLIER.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

THÉORIE NOUVELLE DES FAMILLES COMPLEXES NORMALES

APPLICATIONS A L'ÉTUDE DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES

PAR M. JACQUES DUFRESNOY.

Introduction.

C'est l'exposé magistral et aujourd'hui classique de M. P. Montel (1) sur les familles normales qui est le point de départ de notre étude. Après avoir appliqué la notion de famille normale aux fonctions holomorphes ou méromorphes, M. Montel étend cette notion aux *systèmes* f *de* $n+1$ *fonctions* f_0, f_1, ..., f_n : il dit que de tels systèmes forment une *famille complexe normale* si les $n+1$ familles constituées respectivement par les fonctions f_0, les fonctions f_1, ..., les fonctions f_n sont elles-mêmes normales. Mais, sauf dans des cas particuliers, la théorie construite à partir de là ne permet pas d'atteindre les propriétés des familles dont tous les systèmes présentent un certain nombre de combinaisons linéaires exceptionnelles.

Pour y parvenir, nous avons dû apporter à la définition une modification sensible. Elle nous a été suggérée par la méthode que MM. H. et J. Weyl (2)

(1) P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Gauthier-Villars, 1927).

(2) H. et J. WEYL, *Meromorphic curves* (*Annals of mathematics*, II, 39, 1938, p. 516-538).

d'abord, puis M. L. Ahlfors (¹) ont utilisée dans l'étude d'une question voisine. Cette modification nous a permis de bâtir une théorie harmonieuse que nous exposons ici de façon synthétique en nous inspirant de ce qu'a fait M. Montel (²) pour les familles de fonctions méromorphes. Nous n'avons pas traité des familles complexes quasi normales, ce qu'on pourrait faire sans peine dans le même esprit.

Nous nous plaçons à un point de vue homogène, ne distinguant pas entre deux systèmes dont les éléments sont proportionnels. Après avoir introduit les notions de distance et de convergence pour des systèmes de $n+1$ nombres complexes, nous définissons la continuité, la convergence, la normalité pour des systèmes de $n+1$ fonctions quelconques et nous obtenons un premier critère de normalité à partir de l'égale continuité. Nous limitant ensuite aux systèmes de fonctions holomorphes, nous indiquons des propriétés des suites uniformément convergentes, un second critère de normalité et des propositions correspondant aux théorèmes de Schottky, Landau et Vitali (théorèmes I, II et III). Tout ceci fait l'objet du premier Chapitre.

Dans le Chapitre II interviennent les combinaisons exceptionnelles (ou lacunaires). Ce sont des combinaisons linéaires, homogènes,

$$a_0 f_0(z) + a_1 f_1(z) + \ldots + a_n f_n(z),$$

où les a_p sont des constantes, et qui ne présentent pas de zéros dans le domaine où l'on se place. Conformément à la terminologie usuelle, nous dirons que plusieurs combinaisons sont linéairement indépendantes s'il est impossible de trouver entre elles une relation linéaire homogène, à coefficients non tous nuls, qui soit identiquement vérifiée *relativement à* $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Nous indiquons le nombre maximum de combinaisons exceptionnelles d'un système de fonctions entières (théorèmes IV et V, ce dernier étant amélioré dans l'Appendice : théorème XVI); puis nous étudions, à l'aide d'un théorème de M. Henri Cartan (³), les familles de systèmes de fonctions holomorphes présentant des combinaisons exceptionnelles (critère fondamental et théorème VI, celui-ci étant précisé dans l'Appendice : théorème XVII). Nous donnons enfin des extensions des théorèmes de Schottky (théorème VII) et de Landau (théorème VIII) et nous parvenons à mettre le premier sous une forme partiellement quantitative.

Dans le troisième et dernier Chapitre, nous précisons la proposition connue sous le nom de « continuité des racines d'une équation algébrique » (lemme IV), ce qui nous permet de ramener aux propriétés correspondantes des systèmes

---

(¹) L. Ahlfors, *The theory of meromorphic curves* (*Acta Societatis scientiarum Fennicae*, Nova series A, III, 4, 1941).

(²) P. Montel, *loc. cit.*

(³) H. Cartan, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications* [*Annales de l'École Normale Supérieure*, (3), 45, 1928, p. 256-346].

de fonctions, les différentes propriétés des algébroïdes — convergence, convergence uniforme, normalité, égale continuité, ..., — définies directement de la façon la plus naturelle (¹). Après quoi toute l'étude des algébroïdes se déroule sans peine parallèlement à celle des systèmes de fonctions holomorphes, faite dans les Chapitres I et II. On est ainsi conduit à rassembler des résultats connus et à en établir de nouveaux qui, quoique prévus depuis longtemps, n'avaient jamais reçu de démonstration. Ici comme toujours, la méthode des familles normales apporte l'unité et la cohérence (²).

Signalons enfin que, pour ne pas alourdir les notations, nous n'avons presque jamais indiqué explicitement sur quels indices portaient les sommations, mais nous avons systématiquement désigné ceux-ci par les lettres i et j, ce qui évite toute ambiguïté.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

Systèmes de $n+1$ nombres complexes.

1. A titre préliminaire nous allons donner quelques définitions sur les systèmes de $n+1$ nombres complexes. Nous n'envisagerons que des systèmes formés de nombres non tous nuls et nous ne considérerons pas comme distincts deux systèmes dont les éléments correspondants sont proportionnels (*systèmes équivalents*).

Étant donnés deux systèmes, le premier $w^{(1)}$ constitué par les nombres $w_0^{(1)}$, $w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}$ et le second $w^{(2)}$ constitué par les nombres $w_0^{(2)}, w_1^{(2)}, \ldots, w_n^{(2)}$, nous appellerons *distance* de ces deux systèmes et nous représenterons par $[w^{(1)}, w^{(2)}]$ l'expression

$$\sqrt{\frac{\sum_{i,j} |w_i^{(1)} w_j^{(2)} - w_j^{(1)} w_i^{(2)}|^2}{\sum_j |w_j^{(1)}|^2 \sum_j |w_j^{(2)}|^2}}.$$

C'est une quantité qui ne change pas quand on remplace un système par un système équivalent; de plus, elle est indépendante de l'ordre dans lequel sont donnés les deux systèmes et enfin elle est positive ou nulle. Cette dernière éventualité se produit dans le cas ou les deux systèmes sont équivalents et dans ce cas-là seulement. Si la distance de deux systèmes est petite, nous dirons que ceux-ci sont voisins.

(¹) *Cf.* G. RÉMOUNDOS, *Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Acta mathematica*, 37, 1914, p. 241-300); *Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine* [*Annali di matematica*, (3), 23, p. 1-24].

(²) Aux auteurs déjà cités, il faut ajouter M. A. Bloch à qui sont dues des idées dont la fécondité s'est affirmée dans les travaux de MM. H. Cartan, H. et J. Weyl, L. Ahlfors.

2. Nous allons établir maintenant une propriété fondamentale de la distance de deux systèmes. A cet effet, remplaçons tout d'abord chacun d'eux par un système équivalent de façon à se ramener au cas où $\Sigma|w_i^{(1)}|^2=\Sigma|w_i^{(2)}|^2=1$ (*systèmes normés*). Profitant de l'arbitraire qui subsiste, on peut encore multiplier tous les éléments du second système par exemple, par le nombre complexe $e^{i\theta}$ de module 1. Nous avons alors

$$\Sigma|w_i^{(1)}-w_i^{(2)}e^{i\theta}|^2=2|1-\mathcal{R}(e^{-i\theta}\Sigma w_i^{(1)}\overline{w}_i^{(2)})|.$$

Lorsque θ varie, cette quantité prend toute les valeurs comprises entre les expressions

$$2[1\pm|\Sigma w_i^{(1)}\overline{w}_i^{(2)}|],$$

dont la plus petite est égale (1) à

$$2[1-|\Sigma w_i^{(1)}\overline{w}_i^{(2)}|]=2\left[1-\sqrt{1-|(w^{(1)},w^{(2)})|^2}\right].$$

De sorte qu'après avoir éventuellement remplacé les deux systèmes $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$ par des systèmes normés équivalents convenablement choisis, on a

$$(1)\qquad \Sigma|w_i^{(2)}-w_i^{(1)}|^2=4\sin^2\frac{\varphi}{2}\qquad \text{si l'on pose}\qquad |(w^{(1)},w^{(2)})|=\sin\varphi\qquad \left(0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

Il en résulte que des systèmes convenablement normés satisfont à

$$(2)\qquad \Sigma|w_i^{(2)}-w_i^{(1)}|^2<2|(w^{(1)},w^{(2)})|^2$$

et que des systèmes normés quelconques vérifient l'inégalité

$$(3)\qquad |(w^{(1)},w^{(2)})|^2<\Sigma|w_i^{(2)}-w_i^{(1)}|^2.$$

Pour des systèmes quelconques non normés, il n'y a pas de relation analogue à (2); par contre (3) peut s'étendre sous la forme

$$(3\,bis)\qquad |(w^{(1)},w^{(2)})|^2<\frac{\Sigma|w_i^{(2)}-w_i^{(1)}|^2}{\sqrt{\Sigma|w_i^{(1)}|^2\Sigma|w_i^{(2)}|^2}},$$

car

$$\Sigma|w_i^{(2)}-w_i^{(1)}|^2\geqq\Sigma|w_i^{(2)}|^2+\Sigma|w_i^{(1)}|^2-2|\Sigma w_i^{(1)}\overline{w}_i^{(2)}|\geqq 2\left[\sqrt{\Sigma|w_i^{(1)}|^2\Sigma|w_i^{(2)}|^2}-|\Sigma w_i^{(1)}\overline{w}_i^{(2)}|\right]$$

à partir d'où le calcul s'achève comme dans le cas des systèmes normés.

3. La propriété établie dans le numéro précédent entraîne deux conséquences très importantes :

a. Les distances de trois systèmes pris deux à deux vérifient l'inégalité triangulaire

$$(4)\qquad |(w^{(2)},w^{(3)})|<|(w^{(1)},w^{(2)})|+|(w^{(1)},w^{(3)})|.$$

(1) En vertu de l'identité

$$\Sigma|w_i^{(1)}w_j^{(2)}-w_j^{(1)}w_i^{(2)}|^2+|\Sigma w_i^{(1)}w_i^{(2)}|^2=\Sigma|w_i^{(1)}|^2\Sigma|w_i^{(2)}|^2.$$

En effet, après avoir convenablement normé les systèmes, on a

$$[w^{(1)}, w^{(2)}] = \sin\varphi_3, \qquad \text{avec} \qquad \Sigma |w_i^{(2)} - w_i^{(1)}|^2 = 4\sin^2\frac{\varphi_3}{2} \qquad \left(0 \leqq \varphi_3 \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$[w^{(1)}, w^{(3)}] = \sin\varphi_2, \qquad \text{avec} \qquad \Sigma |w_i^{(3)} - w_i^{(1)}|^2 = 4\sin^2\frac{\varphi_2}{2} \qquad \left(0 \leqq \varphi_2 \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

et

$$[w^{(2)}, w^{(3)}] = \sin\varphi_1, \qquad \text{avec} \qquad \Sigma |w_i^{(3)} - w_i^{(2)}|^2 > 4\sin^2\frac{\varphi_1}{2} \qquad \left(0 \leqq \varphi_1 \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Or on démontre aisément (1) l'inégalité

$$\sqrt{\Sigma |w_i^{(3)} - w_i^{(2)}|^2} \leqq \sqrt{\Sigma |w_i^{(3)} - w_i^{(1)}|^2} + \sqrt{\Sigma |w_i^{(2)} - w_i^{(1)}|^2},$$

qui entraîne la suivante

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} \leqq \sin\frac{\varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_3}{2}.$$

Celle-ci entraîne à son tour l'inégalité triangulaire

$$\sin\varphi_1 < \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3,$$

car, si φ_1 est supérieur à φ_2 et à φ_3, seul cas où le résultat ne soit pas évident, $\cos\frac{\varphi_1}{2}$ est inférieur à $\cos\frac{\varphi_2}{2}$ et à $\cos\frac{\varphi_3}{2}$, d'où

$$2\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} \leqq 2\left(\sin\frac{\varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_3}{2}\right)\cos\frac{\varphi_1}{2} < 2\sin\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} + 2\sin\frac{\varphi_3}{2}\cos\frac{\varphi_3}{2}.$$

b. Une substitution linéaire homogène fixe non dégénérée effectuée sur les éléments d'un système le transforme en un nouveau système. A deux systèmes voisins correspondent ainsi deux systèmes voisins.

La démonstration précisera cet énoncé. Soit

$$W_k = \Sigma a_{k,i} w_i \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

la substitution linéaire considérée et

$$w_k = \Sigma A_{k,i} W_i \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

la substitution inverse. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|W_k^{(2)} - W_k^{(1)}|^2 \leqq \Sigma |a_{k,i}|^2 \Sigma |w_i^{(2)} - w_i^{(1)}|^2$$

et

$$|w_k|^2 \leqq \Sigma |A_{k,i}|^2 \Sigma |W_i|^2.$$

---

(1) La relation

$$\sqrt{\Sigma |a_i + b_i|^2} \leqq \sqrt{\Sigma |a_i|^2} + \sqrt{\Sigma |b_i|^2},$$

que nous utilisons ici, peut s'établir en ajoutant membre à membre les inégalités

$$|a_j + b_j|^2 \leqq \left[\sqrt{\Sigma |a_i|^2} + \sqrt{\Sigma |b_i|^2}\right]\left[\frac{|a_j|^2}{\sqrt{\Sigma |a_i|^2}} + \frac{|b_j|^2}{\sqrt{\Sigma |b_i|^2}}\right] \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

qui sont des cas particuliers de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

De ces inégalités, sommées relativement à l'indice k, on déduit aussitôt

$$\frac{\Sigma | W_i^{(2)} \quad W_i^{(1)}|^2}{\sqrt{\Sigma |W_i^{(1)}|^2 \Sigma |W_i^{(2)}|^2}} \leq \Sigma |a_{ij}|^2 \Sigma |\lambda_{i,j}|^2 \frac{\Sigma |w_i^{(2)} \quad w_i^{(1)}|^2}{\sqrt{\Sigma |w_i^{(1)}|^2 \Sigma |w_i^{(2)}|^2}}.$$

En remarquant que l'on peut toujours supposer les systèmes $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ convenablement normés avant de leur appliquer l'inégalité précédente, il vient, compte tenu des relations (2) et (3^{bis}),

$$|W^{(1)}, W^{(2)}| \leq |a_{ij}|^2 \Sigma |\lambda_{i,j}|^2 |w^{(1)}, w^{(2)}|. \tag{5}$$

4. Nous dirons qu'un système variable w tend vers un système fixe $w^{(0)}$, lorsque la distance $|w, w^{(0)}|$ tend vers zéro. On dira aussi, pour exprimer la même propriété, que w est convergent et que $w^{(0)}$ est sa limite. On voit aussitôt qu'une substitution linéaire homogène fixe non dégénérée conserve la convergence et l'on démontre sans peine le critère de Cauchy : *Pour que la suite des systèmes $w^{(k)}$ soit convergente, il faut et il suffit que, ε étant arbitrairement petit, $|w^{(k+l)}, w^{(k)}| < \varepsilon$ dès que k est assez grand, quel que soit l positif.* Ce critère s'établit exactement comme le critère analogue relatif à la convergence ordinaire; on utilise l'inégalité (4) et la proposition suivante qui apparait évidente si l'on commence par normer les systèmes sur lesquels on raisonne : tout ensemble infini de systèmes présente au moins un système limite.

Systèmes de $n+1$ fonctions.

5. Soit maintenant un système de $n+1$ fonctions complexes définies dans un même domaine. Nous supposerons essentiellement que les fonctions du système ne s'annulent jamais simultanément et nous ne considérerons pas comme distincts deux systèmes dont l'un se déduit de l'autre en multipliant par une même fonction les $n+1$ fonctions qui le composent. Tout ce que nous allons dire dans cette section s'applique quel que soit le nombre de variables réelles ou complexes dont dépendent les fonctions. Mais, pour simplifier l'exposé, nous nous placerons dès maintenant dans le cas de fonctions d'une seule variable complexe z, l'extension au cas général étant immédiate. Nous supposerons d'autre part que le domaine de définition des fonctions est borné, cette hypothèse n'étant d'ailleurs pas essentielle (1).

6. Nous dirons qu'un système de fonctions est *continu en un point* z_0 si la distance des systèmes des valeurs prises par les fonctions aux points z_0 et z

(1) Si l'on veut s'en affranchir, il suffit de remplacer, dans la suite, la distance $|z''-z'|$ de deux points du domaine par leur distance sphérique

$$\frac{|z''-z'|}{\sqrt{1+|z'|^2}\sqrt{1+|z''|^2}}.$$

tend vers zéro lorsque z tend vers z_0. Un système de fonctions est dit *continu dans un domaine* s'il est continu en chaque point de ce domaine; il y est dit *uniformément continu* si, à tout nombre positif ε, on peut associer un nombre η tel que l'on ait $[f(z'), f(z'')] < \varepsilon$ pourvu que z' et z'' soient deux points du domaine satisfaisant à $|z'' - z'| < \eta$.

Un système continu dans un domaine fermé y est uniformément continu. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite de couples de points z'_k, z''_k appartenant au domaine, dont la distance $|z''_k - z'_k|$ tendrait vers zéro avec $\frac{1}{k}$ tandis que l'expression $[f(z'_k), f(z''_k)]$ demeurerait supérieure à une borne positive ε; on pourrait extraire de la suite des couples z'_k, z''_k une suite partielle z'_{n_k}, z''_{n_k} qui tende vers un point z_0 du domaine fermé et, d'après la continuité au point z_0, on aurait

$$[f(z_0), f(z'_{n_k})] < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad [f(z_0), f(z''_{n_k})] < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que k serait assez grand; il en résulterait

$$[f(z'_{n_k}), f(z''_{n_k})] < \varepsilon,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite.

Nous nous limiterons ici à l'étude des familles de systèmes continus. Nous dirons que les systèmes $f^{(k)}(z)$ appartenant à une telle famille sont *également continus dans l'intérieur* du domaine D si, à tout domaine D′ complètement intérieur à D et à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre η tel que, z' et z'' étant deux points quelconques de D′ satisfaisant à $|z'' - z'| < \eta$, on ait $[f^{(k)}(z'), f^{(k)}(z'')] < \varepsilon$, quel que soit le système $f^{(k)}$ de la famille.

7. Une suite de systèmes $f^{(k)}(z)$ de fonctions est dite *convergente* dans un domaine D si, pour chaque point z de ce domaine, la suite des systèmes des valeurs prises par les fonctions converge elle-même vers un système de valeurs. L'ensemble, pour les différents z, de ces systèmes limites de valeurs définit le système limite de fonctions que nous représenterons par $f^{(0)}(z)$. Par définition, la convergence sera *uniforme dans* D si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre N tel que $k > N$ entraîne $[f^{(k)}(z), f^{(0)}(z)] < \varepsilon$ quel que soit z dans D; elle sera *uniforme dans l'intérieur de* D si, à tout nombre positif ε et à tout domaine D′ complètement intérieur à D, on peut faire correspondre un nombre N tel que $k > N$ entraîne $[f^{(k)}(z), f^{(0)}(z)] < \varepsilon$ quel que soit z dans D′. On voit aussitôt que le critère de Cauchy relatif à la convergence uniforme s'applique.

Pour que la suite de systèmes $f^{(k)}(z)$ soit uniformément convergente dans D (ou dans l'intérieur de D) *il faut et il suffit que* $[f^{(k+l)}(z), f^{(k)}(z)] < \varepsilon$ *dès que k est assez grand, quel que soit l positif, lorsque z est dans* D (ou dans D′ quelconque complètement intérieur à D).

Si une suite de systèmes continus de fonctions converge uniformément, le système limite est continu. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi; il existerait alors une suite de points z_p tendant vers un point z_0 de D et tels que les valeurs correspondantes du système limite satisfassent à $[f^{(0)}(z_p), f^{(0)}(z_0)] > \varepsilon$, où ε est un nombre positif fixe. Mais, à condition de prendre k assez grand, l'expression $[f^{(k)}(z), f^{(0)}(z)]$ est arbitrairement petite lorsque z est dans D et, par conséquent,

$$[f^{k}(z_p), f^{0}(z_p)] < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad [f^{k}(z_0), f^{0}(z_0)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, le système $f^{(k)}(z)$ étant continu au point z_0, on a, dès que p est suffisamment grand,

$$[f^{k}(z_p), f^{k}(z_0)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'application de l'inégalité triangulaire nous conduit alors à une contradiction.

Dans l'énoncé de la propriété précédente et dans sa démonstration, il y aurait lieu de préciser si l'on se place sur le domaine D fermé ou dans l'intérieur du domaine D. Nous ne l'avons pas fait dans un but de simplification et parce que le raisonnement a exactement la même forme dans chacun des deux cas.

8. Définition. — *Une famille de systèmes de fonctions définies dans un domaine* D *y est normale si, de toute suite infinie de systèmes de la famille, on peut extraire une suite partielle uniformément convergente dans l'intérieur de* D.

Si l'on effectue sur les fonctions de tous les systèmes d'une famille une même substitution linéaire homogène fixe non dégénérée, on obtient une nouvelle famille qui est normale en même temps que la première. En effet, une telle substitution conserve la convergence uniforme d'une suite partielle, ainsi qu'il résulte de l'inégalité (5).

Premier critère de normalité. — *Pour qu'une famille de systèmes continus de fonctions soit normale dans un domaine* D, *il faut et il suffit qu'il y ait égale continuité dans l'intérieur de ce domaine.*

La condition est nécessaire. Supposons en effet qu'il n'y ait pas égale continuité; on pourrait mettre en évidence une suite de systèmes $f^{(k)}(z)$ à chacun desquels serait associés deux points z'_k et z''_k situés dans un domaine D' complètement intérieur à D et tels que

$$[f^{k}(z'_k), f^{k}(z''_k)] > \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |z''_k - z'_k| \to 0,$$

où ε est un nombre positif fixe. En remplaçant au besoin cette suite par une suite partielle, on peut toujours supposer que z'_k et z''_k tendent vers une limite z_0. Puisque la famille est normale par hypothèse, on peut extraire de la suite une suite partielle $f^{(n_k)}(z)$ qui converge uniformément. Le système

limite $f^{(0)}$ étant continu, les expressions

$$[f^{(0)}(z_0), f^{(0)}(z'_{n_k})] \qquad \text{et} \qquad [f^{(0)}(z_0), f^{(0)}(z''_{n_k})]$$

sont inférieures à $\frac{\varepsilon}{4}$ dès que k est assez grand. Il en est de même de

$$[f^{(0)}(z'_{n_k}), f^{(n_k)}(z'_{n_k})] \qquad \text{et} \qquad [f^{(0)}(z''_{n_k}), f^{(n_k)}(z''_{n_k})]$$

en raison de la convergence uniforme. L'inégalité triangulaire nous montre alors que

$$[f^{(n_k)}(z'_{n_k}), f^{(n_k)}(z''_{n_k})] < \varepsilon,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

La condition est suffisante. Pour le montrer considérons un ensemble E de points $z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$, dénombrable, dense dans D. D'après une remarque déjà faite (n° 4), d'une suite donnée de systèmes de fonctions on peut extraire une suite partielle qui soit convergente au point z_1 ; de celle-ci on peut extraire une nouvelle suite partielle qui soit convergente au point z_2, puis de cette dernière une autre qui soit convergente au point z_3 et ainsi de suite. Le procédé diagonal, bien connu dans la théorie des familles normales, nous permet de former une suite partielle $f^{(n_k)}(z)$ qui soit convergente aux différents points de E. La limite est un système $f^{(0)}(z)$ de fonctions définies sur l'ensemble E. Ce système limite est uniformément continu dans l'intérieur de D car, par hypothèse, à tout nombre positif ε_1 et à tout domaine D′ complètement intérieur à D on peut faire correspondre un nombre η_1 tel que

$$|z_{p'} - z_p| < \eta_1 \qquad \text{entraîne} \qquad [f^{(n_k)}(z_{p'}), f^{(n_k)}(z_p)] < \varepsilon_1,$$

d'où, en passant à la limite, $[f^{(0)}(z_{p'}), f^{(0)}(z_p)] < \varepsilon_1$. Le système $f^{(0)}$ peut donc être prolongé par continuité dans tout l'intérieur du domaine D. Il nous reste à démontrer qu'il y est limite uniforme de la suite partielle qui a servi à le définir. Pour cela, donnons-nous arbitrairement un domaine D′ complètement intérieur à D et un nombre positif ε. Il existe un nombre η_1 tel que z et z' étant deux points quelconques de D′ distants de moins de η_1, on ait

$$[f^{(n_k)}(z), f^{(n_k)}(z')] < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad [f^{(0)}(z), f^{(0)}(z')] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Choisissons un sous-ensemble E_1 de E, formé d'un *nombre fini* de points, de telle sorte qu'il existe au moins un point de E_1 à une distance moindre que η_1 de tout point du domaine D′. On peut alors déterminer un nombre N tel que

$$k > N \qquad \text{entraîne} \qquad [f^{(n_k)}(z'), f^{(0)}(z')] < \frac{\varepsilon}{3},$$

lorsque z' appartient à E_1. Si z est un point quelconque de D′, on a donc, en vertu de l'inégalité triangulaire,

$$[f^{(n_k)}(z), f^{(0)}(z)] < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Systèmes de $n-1$ fonctions holomorphes.

9. Étudions maintenant le cas particulier des systèmes de $n+1$ fonctions holomorphes. Soit une suite de tels systèmes $f^{(k)}(z)$ uniformément convergente dans l'intérieur d'un domaine D. Les fonctions du système limite $f^{(0)}(z)$ ne sont pas complètement définies puisqu'on peut les multiplier toutes par une même fonction arbitraire. Nous allons démontrer que, en profitant de cette latitude, *il est possible de les transformer simultanément en fonctions holomorphes*.

Les zéros des fonctions du système limite sont parfaitement déterminés, car la multiplication par une même fonction (ne s'annulant pas) ne peut les modifier. Montrons que ces zéros sont isolés dans l'intérieur de D. Il nous suffit pour cela d'établir que, z_0 étant un point quelconque de D, les zéros sont isolés dans le voisinage de z_0. Or, l'une au moins des fonctions limites n'est pas nulle en z_0, soit $f_\mu^{(0)}(z_0) \neq 0$. En raison de la continuité du système limite, il existe un voisinage de z_0 dans lequel on a

$$[f^{(0)}(z_0), f^{(0)}(z)] < \frac{1}{3} \frac{f_\mu^{(0)}(z_0)}{\sqrt{\sum f_i^{(0)}(z_0)^2}}.$$

Dans ce voisinage, supposé complètement intérieur à D, on peut trouver un nombre N tel que $k > N$ entraîne

$$[f^{(0)}(z), f^{(k)}(z)] < \frac{1}{3} \frac{f_\mu^{(0)}(z_0)}{\sqrt{\sum [f_i^{(0)}(z_0)]^2}}.$$

Il en résulte que

$$[f^{(0)}(z_0), f^{(k)}(z)] < \frac{2}{3} \frac{f_\mu^{(0)}(z_0)}{\sqrt{\sum f_i^{(0)}(z_0)^2}},$$

ce qui nous montre que les fonctions $f_\mu^{(k)}(z)$ ne s'annulent pas dans le voisinage [non plus que la fonction $f_\mu^{(0)}(z)$] car on voit immédiatement, à partir de la définition de la distance, que la relation $f_\mu^{(k)}(z_1) = 0$ entraînerait

$$[f^{(0)}(z_0), f^{(k)}(z_1)]^2 \geq \frac{f_\mu^{(0)}(z_0)^2}{\sum f_i^{(0)}(z_0)^2}.$$

Dans le voisinage considéré nous pouvons mettre les systèmes de fonctions holomorphes sous la forme

$$\varphi_0^{(k)} = \frac{f_0^{(k)}}{f_\mu^{(k)}}, \qquad \varphi_1^{(k)} = \frac{f_1^{(k)}}{f_\mu^{(k)}}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_\mu^{(k)} = 1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n^{(k)} = \frac{f_n^{(k)}}{f_\mu^{(k)}},$$

et opérer de même sur le système limite qui s'écrit alors

$$\varphi_0^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, \ldots \varphi_\mu^{(0)} = 1, \ldots, \varphi_n^{(0)}.$$

La somme des carrés des modules des fonctions de chacun de ces systèmes est bornée supérieurement dans le voisinage. En effet, la distance du système $z^{(k)}$

au système $\varphi^{(k)*}$ qui s'en déduit en remplaçant $\varphi_\mu^{(k)}$ par o est donnée par

$$[\varphi^{k}(z), \varphi^{k*}(z)] = \frac{1}{\sqrt{\Sigma |\varphi_i^{(k)}(z)|^2}},$$

tandis que, d'après une remarque déjà faite,

$$[\varphi^{k*}(z), \varphi^{0*}(z_0)] \geq \frac{\varphi_\mu^{0}(z_0)}{\sqrt{\Sigma |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}},$$

L'inégalité triangulaire

$$[\varphi^{k*}(z), \varphi^{0*}(z_0)] \leq [\varphi^{k*}(z), \varphi^{k}(z)] + [\varphi^{(k)}(z), \varphi^{0}(z_0)]$$

nous conduit alors à

$$\frac{\varphi_\mu^{0}(z_0)}{\sqrt{\Sigma |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}} < \frac{1}{\sqrt{\Sigma |\varphi_i^{(k)}(z)|^2}} + \frac{2}{3}\frac{|\varphi_\mu^{0'}(z_0)|}{\sqrt{\Sigma |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}},$$

d'où

$$\Sigma |\varphi_i^{(k)}(z)|^2 < 9\frac{\Sigma |\varphi_i^{0'}(z_0)|^2}{|\varphi_\mu^{(0)}(z_0)|^2}.$$

On verrait de même que $\Sigma |\varphi_i^{(0)}(z)|^2$ est borné supérieurement.

Cette propriété étant établie, l'inégalité

$$|\varphi^{0}, \varphi^{k}|^2 = \frac{\Sigma |\varphi_i^{(0)}\varphi_i^{(k)} - \varphi_i^{(0)}\varphi_i^{(k)}|^2}{\Sigma |\varphi_i^{(0)}|^2 \Sigma |\varphi_i^{(k)}|^2} > \frac{\Sigma |\varphi_i^{(k)} - \varphi_i^{(0)}|^2}{\Sigma |\varphi_i^{(0)}|^2 \Sigma |\varphi_i^{(k)}|^2},$$

conséquence de $\varphi_\mu^{(0)} = \varphi_\mu^{(k)} = 1$, nous montre qu'il y a convergence uniforme, au sens ordinaire du mot, des fonctions holomorphes $\varphi_\nu^{(k)}(z)$ vers les fonctions $\varphi_\nu^{(0)}(z)$. Celles-ci sont donc holomorphes dans le voisinage considéré. Il en résulte en particulier que leurs zéros, donc ceux des fonctions $f_\nu^0(z)$, sont isolés.

Considérons alors dans tout le domaine D les fonctions

$$1, \quad \frac{f_1^0}{f_0^0}, \quad \frac{f_2^0}{f_0^0}, \quad \ldots \quad \frac{f_n^0}{f_0^0}.$$

Elles sont holomorphes au voisinage de tout point qui n'annule pas f_0^0 : or ces derniers sont isolés et, dans le voisinage de chacun d'eux, les fonctions précédentes multipliées par $\frac{f_0^0}{f_p^{(0)}}$ (avec p bien choisi) deviennent holomorphes. Finalement, les fonctions considérées sont méromorphes. En les multipliant toutes par un même facteur convenable χ^0 on obtient bien un système de fonctions holomorphes dans D. C'est la propriété annoncée.

10. Ce résultat peut être précisé de façon utile. Nous allons montrer qu'*il existe une suite de fonctions holomorphes* $\psi^{(k)}(z)$ *telle que les* $n+1$ *suites de termes généraux*

$$\psi^{k} f_0^{(k)}, \quad \psi^{(k)} f_1^{(k)}, \quad \ldots \quad \psi^{(k)} f_n^{k},$$

convergent uniformément (au sens ordinaire) dans l'intérieur de D *respectivement vers les* $n+1$ *fonctions holomorphes constituant le système limite* $f^0(z)$.

D'après l'étude locale que nous venons de faire et les propriétés connues des suites uniformément convergentes de fonctions holomorphes, on voit aussitôt que les zéros de $f_0^{(k)}(z)$ tendent vers ceux de $f_0^{(0)}(z)$. D'autre part, nous avons été conduit à utiliser une fonction holomorphe $\chi^{(0)}(z)$ qui présente les mêmes zéros que $f_0^{(0)}(z)$. On peut déterminer une suite de fonctions holomorphes $\chi^{(k)}(z)$, tendant uniformément vers $\chi^{(0)}(z)$ dans l'intérieur de D, la fonction $\chi^{(k)}(z)$ ayant mêmes zéros que $f_0^{(k)}(z)$ (1). Il suffit alors de prendre

$$\psi^{(k)}(z) \equiv \frac{\chi^{(k)}(z)}{f_0^{(k)}(z)},$$

pour que la propriété énoncée devienne évidente.

11. On en déduit deux lemmes importants pour les *suites uniformément convergentes* de systèmes de fonctions holomorphes.

LEMME I. — *Considérons pour chacun des systèmes de la suite une même combinaison linéaire*

$$a_0 f_0^{(k)} + a_1 f_1^{(k)} + \ldots + a_n f_n^{(k)}.$$

Si le système limite n'annule pas identiquement cette combinaison, les zéros des combinaisons relatives aux systèmes de la suite tendent vers les zéros relatifs au système limite. En particulier, si les combinaisons formées avec les systèmes de

---

(1) On peut toujours se ramener au cas où le domaine D est le cercle $|z|<1$. Soit alors $|z| = r < 1$ une circonférence ne passant par aucun zéro de $\chi^{(0)}(z)$. Dès que k est suffisamment grand, il est possible de trouver une fonction $h^{(k)}(z)$, méromorphe dans $|z|<1$, ayant mêmes zéros que $f_0^{(k)}(z)$, ayant pour pôles les zéros de $\chi^{(0)}(z)$, et différant de 1 de moins de ε' lorsque $|z| = r$. En effet, pour k assez grand, $\chi^{(0)}(z)$ et $f_0^{(k)}(z)$ présentent dans $|z|<r$ le même nombre de zéros qu'on peut associer deux à deux, soit z_q avec $z_q^{(k)}$, de façon que la distance de deux zéros associés soit inférieure à un nombre arbitrairement petit; il en résulte que l'expression

$$\prod \frac{z - z_i^{(k)}}{z - z_i},$$

où le produit est étendu aux couples de zéros que nous venons de considérer, est arbitrairement voisine de 1 sur la circonférence $|z| = r$. D'autre part, il existe une fonction $g^{(k)}(z)$, méromorphe dans $|z|<1$, et ayant pour zéros et pôles respectivement les zéros de $f_0^{(k)}(z)$ et de $\chi^{(0)}(z)$ qui sont situés dans la couronne $r<|z|<1$. La fonction $\log g^{(k)}(z)$ est holomorphe dans $|z|\leq r$; avec dans ce cercle une erreur aussi petite que l'on veut, on peut remplacer $\log g^{(k)}(z)$ par un polynome $P^{(k)}(z)$ section de sa série de Taylor. On a ainsi démontré l'existence de la fonction

$$h^{(k)}(z) \equiv g^{(k)}(z) e^{-P^{(k)}(z)} \prod \frac{z - z_i^{(k)}}{z - z_i}.$$

A r et ε donnés correspond donc un entier $k_0(r, \varepsilon)$ tel que, pour $k > k_0(r, \varepsilon)$ il existe une fonction $h^{(k)}(z)\chi^{(0)}(z)$, holomorphe dans $|z|<1$, ayant mêmes zéros que $f_0^{(k)}(z)$, et différant de $\chi^{(0)}(z)$ de ε lorsque $|z| = r$, donc aussi lorsque $|z|\leq r$. Choisissons alors une suite $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$, tendant vers 1 et une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$, tendant vers 0; on leur fait correspondre la suite croissante d'entiers $k_p = k_0(r_p, \varepsilon_p)$. Tout nombre entier k supérieur à k_1 détermine un entier p tel que $k_p \leq k < k_{p+1}$; et l'on peut calculer $\chi^{(k)}(z) \equiv h^{(k)}(z)\chi^{(0)}(z)$ par le procédé précédent où l'on a fixé $r = r_p, \varepsilon = \varepsilon_p$.

la suite ne présentent pas de zéros, il en est de même de la combinaison formée avec le système limite, à moins que celle-ci ne soit identiquement nulle.

C'est là une application immédiate de la propriété de convergence des zéros pour une suite uniformément convergente (au sens ordinaire) de fonctions holomorphes.

LEMME II. — *Si la suite des systèmes* $f^{(k)}(z)$ *tend uniformément vers le système* $f^{(0)}(z)$, *la suite des systèmes constitués par les fonctions*

$$f_p^{(k)}(z) f_q^{(k)\prime}(z) - f_q^{(k)}(z) f_p^{(k)\prime}(z)$$

est uniformément convergente (au sens que nous avons attribué à ce terme) *et a pour limite le système des fonctions* $f_p^{(0)} f_q^{(0)\prime} - f_q^{(0)} f_p^{(0)\prime}$; *il y a toutefois exception aux points z, où ces dernières fonctions s'annulent simultanément* (et ne constituent donc plus un système suivant notre terminologie).

En effet, les suites

$$\psi^{(k)2}[f_p^{(k)} f_q^{(k)\prime} - f_q^{(k)} f_p^{(k)\prime}] \equiv \psi^{(k)} f_p^{(k)}[\psi^{(k)} f_q^{(k)}]' - \psi^{(k)} f_q^{(k)}[\psi^{(k)} f_p^{(k)}]'$$

sont uniformément convergentes au sens ordinaire.

Plus généralement, la suite des systèmes constitués par les Wronskiens $\Delta^{(k)}_{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ des fonctions $f_p^{(k)}$ prises r à r ($r \leq n$) est uniformément convergente et a pour limite le système constitué de la même façon à l'aide des fonctions limites $f_p^{(0)}$. Il y a exception si ce « système limite » de Wronskiens comprend des éléments tous nuls (ne constituant donc pas un système à proprement parler).

Le même raisonnement nous démontre aussi la proposition suivante :

LEMME III. — *Dans les mêmes conditions, on peut affirmer sans exception la convergence uniforme au sens ordinaire des expressions*

$$\frac{|f_p^{(k)}|}{[\Sigma |f_i^{(k)}|^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{|f_p^{(k)} f_q^{(k)\prime} - f_q^{(k)} f_p^{(k)\prime}|}{\Sigma |f_i^{(k)}|^2}, \quad \ldots, \quad \frac{|\Delta^{(k)}_{p_1,p_2,\ldots,p_r}|}{[\Sigma |f_i^{(k)}|^2]^{\frac{r}{2}}}, \quad \ldots, \quad \frac{|\Delta^{(k)}_{0,1,2,\ldots,n}|}{[\Sigma |f_i^{(k)}|^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Les limites respectives de ces suites sont formées de la même façon à partir de $f^{(0)}$.

12. DEUXIÈME CRITÈRE DE NORMALITÉ. — *Pour qu'une famille de systèmes* $f(z)$ *de* $n+1$ *fonctions holomorphes soit normale dans un domaine* D, *il faut et il suffit que l'expression*

$$\frac{\sqrt{\Sigma |f_i f_j' - f_j f_i'|^2}}{\Sigma |f_i|^2}$$

soit également bornée dans l'intérieur de D *pour tous les systèmes de la famille.*

Cette condition est nécessaire, car si elle n'était pas satisfaite pour une famille normale on pourrait extraire de celle-ci une suite de systèmes $f^{(k)}(z)$

à chacun desquels correspondrait un point z_k d'un domaine D' complètement intérieur à D, de sorte que l'expression

$$\frac{\sqrt{\sum |f_i^{(k)}(z_k) f_j^{(k)\prime}(z_k) - f_j^{(k)}(z_k) f_i^{(k)\prime}(z_k)|^2}}{\sum |f_i^{(k)}(z_k)|^2}$$

augmente indéfiniment avec k. Quitte à extraire de cette suite une suite partielle, on peut toujours supposer que les points z_k tendent vers un point z_0 intérieur à D et que les systèmes $f^{(k)}$ convergent uniformément vers un système limite $f^{(0)}$. Si l'on pose alors

$$\frac{\sqrt{\sum |f_i^{(0)}(z_0) f_j^{(0)\prime}(z_0) - f_j^{(0)}(z_0) f_i^{(0)\prime}(z_0)|^2}}{\sum |f_i^{(0)}(z_0)|^2} = \mathrm{A},$$

on peut déterminer dans D un voisinage de z_0 dans lequel l'expression figurant au premier membre de la dernière relation reste inférieure à $\mathrm{A}+1$. Dans ce même voisinage, l'expression correspondante relative au système $f^{(k)}$ sera, d'après le lemme III, inférieure à $\mathrm{A}+2$ dès que k sera assez grand, ce qui nous conduit à la contradiction cherchée.

La condition est suffisante, car elle entraîne l'égale continuité en vertu de l'inégalité

$$[f(z_0), f(z_1)] \leq \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{\sum |f_i(z) f_j'(z) - f_j(z) f_i'(z)|^2}}{\sum |f_i(z)|^2} |dz|.$$

Celle-ci est une conséquence de l'inégalité triangulaire, car le module de la différentielle du premier membre par rapport à z_1 satisfait à

$$|[f(z_0), f(z_1) + f'(z_1)\,dz_1] - [f(z_0), f(z_1)]| \leq |[f(z_1), f(z_1) + f'(z_1)\,dz_1]| = \frac{\sqrt{\sum |f_i(z_1) f_j'(z_1) - f_j(z_1) f_i'(z_1)|^2}}{\sum |f_i(z_1)|^2} |dz_1|.$$

13. Voici maintenant deux propriétés importantes des familles complexes normales.

Théorème I. — *Soit une famille normale dans le domaine* $|z| < \mathrm{R}$, *dont chacun des systèmes* $f(z)$ *présente une même combinaison linéaire exceptionnelle* (¹)

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n,$$

l'expression

$$\delta = \frac{|a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n|}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2}\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}}$$

étant, au point $z = 0$, *supérieure à un nombre positif fixe. Dans ces conditions,* δ *reste, dans le domaine* $|z| < r < \mathrm{R}$, *supérieure à une borne positive ne dépendant que de* r.

(¹) Nous entendons par là que la combinaison $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ ne s'annule dans $|z| < \mathrm{R}$ pour aucun système $f(z)$.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait alors une suite de systèmes pour lesquels δ prendrait, dans $|z|<r$, des valeurs tendant vers zéro. La famille étant normale, on pourrait en extraire une suite partielle uniformément convergente et qui jouirait de la même propriété. La combinaison linéaire relative au système limite, n'étant pas identiquement nulle (puisqu'à l'origine on a $\delta > m > 0$), ne peut présenter de zéros, d'après le lemme I. Le δ correspondant au système limite, étant une fonction de z continue et dépourvue de zéros, présente dans $|z|<r$ une borne inférieure positive. Vu la convergence uniforme, il en est de même, à partir d'un certain rang, pour les δ relatifs aux systèmes de la suite; ce qui nous conduit à une contradiction.

THÉORÈME II. — *Si une famille de systèmes $f(z)$ est normale dans $|z|<R$, les expressions*

$$\frac{|f_p f'_q - f_q f'_p|}{\sum |f_i|^2}, \quad \ldots, \quad \frac{|\Delta_{p_1, p_2, \ldots, p_r}|}{|\sum |f_i|^2|^{\frac{r}{2}}}, \quad \ldots, \quad \frac{|\Delta_{0,1,\ldots,n}|}{|\sum |f_i|^2|^{\frac{n+1}{2}}}$$

relatives à tous les systèmes de la famille présentent dans $|z|<r<R$ une borne supérieure ne dépendant que de r.

La démonstration se fait encore par l'absurde. Si la propriété n'était pas vérifiée, il existerait une suite de systèmes pour laquelle l'une des expressions précédentes prendrait des valeurs augmentant indéfiniment, et l'on peut toujours supposer que cette suite est uniformément convergente. Mais l'expression considérée serait bornée pour le système limite, et, d'après le lemme III, il en serait de même pour les systèmes de la suite. C'est la contradiction cherchée.

14. Pour montrer par un nouvel exemple que notre théorie peut recevoir un développement parallèle à celui que M. Montel a donné à la théorie des familles normales de fonctions méromorphes, nous terminerons ce Chapitre en étendant le théorème de Vitali.

THÉORÈME III. — *Si une suite de systèmes, appartenant à une famille normale dans un domaine* D, *converge en une infinité* E *de points complètement intérieure à ce domaine, elle converge uniformément dans tout l'intérieur du domaine* D. (Par infinité de points complètement intérieure au domaine D, nous entendons une infinité de points qui sont tous intérieurs à D, ainsi que leurs points d'accumulation.)

Montrons d'abord qu'*il y a convergence* dans l'intérieur de D. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver deux suites partielles convergeant uniformément dans l'intérieur de D vers deux systèmes limites distincts. Mais ces deux systèmes coïncident nécessairement sur l'ensemble E; nous allons voir qu'il en résulte leur coïncidence dans tout D, ce qui établit la propriété. Considérons,

en effet, deux systèmes $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ coïncidants sur E; en un point z_0 d'accumulation de l'ensemble E les deux systèmes coïncident forcément en raison de leur continuité. Soit, par exemple, $f_0^{(1)}(z_0) \neq 0$ et $f_0^{(2)}(z_0) \neq 0$. Les fonctions $f_0^{(1)}(z)$ et $f_0^{(2)}(z)$ ne s'annulent pas dans le voisinage de z_0 et les fonctions appartenant à chacun des couples suivants

$$\frac{f_1^{(1)}}{f_0^{(1)}} \text{ et } \frac{f_1^{(2)}}{f_0^{(2)}}, \quad \frac{f_2^{(1)}}{f_0^{(1)}} \text{ et } \frac{f_2^{(2)}}{f_0^{(2)}}, \quad \ldots \quad \frac{f_n^{(1)}}{f_0^{(1)}} \text{ et } \frac{f_n^{(2)}}{f_0^{(2)}}$$

sont égales aux points de E situés dans le voisinage considéré. Or ce sont des fonctions méromorphes; elles sont donc égales dans tout l'intérieur de D.

La convergence est uniforme dans l'intérieur de D. Sinon on pourrait extraire de la suite considérée (que nous savons maintenant être convergente dans l'intérieur de D vers un système limite $f^{(0)}$) une suite partielle de systèmes $f^{(k)}$ à chacun desquels serait associé un point z_k appartenant à un domaine D' complètement intérieur à D et tel que

$$|f^{k}(z_k), f^{(0)}(z_k)| > \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif fixe. Or, la famille étant normale, on peut extraire de cette suite une nouvelle suite partielle $f^{(n_k)}$ uniformément convergente; par conséquent

$$|f^{(n_k)}(z_k), f^{(0)}(z_k)| < \varepsilon,$$

dès que n_k est assez grand. L'hypothèse de convergence non uniforme est donc absurde et le théorème se trouve complètement démontré.

CHAPITRE II.

LE CRITÈRE FONDAMENTAL DE NORMALITÉ.

Résultats relatifs aux systèmes de fonctions entières.

15. Nous allons d'abord énoncer des propositions concernant les systèmes de fonctions entières et en donner des démonstrations sous une forme qui va préparer nos considérations ultérieures.

THÉORÈME IV. — *Soit un système de $n+1$ fonctions entières $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$. Il ne peut exister entre ces fonctions $2n+1$ combinaisons linéaires homogènes exceptionnelles qui soient linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, à moins que les fonctions ne soient proportionnelles entre elles* (1).

(1) Dans les théorèmes IV et V, et par conséquent aussi dans les théorèmes X et XI, si le quotient de deux des fonctions f_p est transcendant le mot « exceptionnel » peut être pris au sens large, une combinaison exceptionnelle étant seulement une combinaison n'ayant qu'un nombre fini de zéros. La démonstration n'est que peu modifiée.

Nous croyons que le théorème IV est nouveau. On peut toutefois en rapprocher un résultat de M. P. MONTEL [voir *Leçons sur les familles normales...* (*loc. cit.*), § 128].

Autrement dit, les fonctions f_p sont proportionnelles s'il existe $2n+1$ combinaisons

$$\alpha_{p,0} f_0 + \alpha_{p,1} f_1 + \ldots + \alpha_{p,n} f_n \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2n)$$

dépourvues de zéros et telles qu'aucun des déterminants d'ordre $n+1$ que l'on peut extraire du tableau des coefficients $\alpha_{p,q}$ ne soit nul.

Pour démontrer cette propriété, on désignera par $F_0, F_1, \ldots, F_n$ les $n+1$ premières combinaisons linéaires précédentes, puis on en tirera les f_q en fonction des F_q. Les $2n+1$ combinaisons exceptionnelles deviennent alors

$$\begin{aligned}
&F_0,\\
&F_1,\\
&\ldots\\
&F_n,\\
&a_{1,0} F_0 + a_{1,1} F_1 + \ldots + a_{1,n} F_n,\\
&a_{2,0} F_0 + a_{2,1} F_1 + \ldots + a_{2,n} F_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n,0} F_0 + a_{n,1} F_1 + \ldots + a_{n,n} F_n,
\end{aligned}$$

où les $a_{p,q}$ sont des coefficients numériques qu'on peut calculer à partir des $\alpha_{p,q}$. La condition d'indépendance linéaire se traduit maintenant de la façon suivante : Tous les déterminants, d'ordre quelconque, que l'on peut extraire du tableau

$$\begin{aligned}
&a_{1,0}, \quad a_{1,1}, \quad \ldots, \quad a_{1,n},\\
&a_{2,0}, \quad a_{2,1}, \quad \ldots, \quad a_{2,n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n,0}, \quad a_{n,1}, \quad \ldots, \quad a_{n,n}
\end{aligned}$$

sont différents de zéro.

D'après un théorème bien connu de M. Borel (1), puisque la combinaison

$$a_{1,0} F_0 + a_{1,1} F_1 + \ldots + a_{1,n} F_n$$

ne présente pas de zéros, les fonctions $F_0, F_1, \ldots, F_n$ (si elles ne sont pas toutes proportionnelles) se répartissent en un certain nombre de classes jouissant des propriétés suivantes :

a. chaque classe, sauf une peut être, comprend deux fonctions au moins;

b. les fonctions d'une même classe sont proportionnelles;

c. la combinaison considérée est somme de combinaisons partielles, chacune de celles-ci faisant intervenir les fonctions figurant dans l'une des classes; à l'exception de l'une d'elles, les combinaisons partielles sont identiquement nulles.

Et la même propriété va s'appliquer à toutes les combinaisons linéaires exceptionnelles. Chacune d'elles donnera naissance à une combinaison

(1) É. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, 20, 1897, p. 357-396).

partielle identiquement nulle au moins. Ces dernières seront donc au moins au nombre de n. Nous allons montrer d'autre part qu'elles sont linéairement indépendantes. Il en résultera aussitôt que les fonctions F_q sont proportionnelles, donc aussi les fonctions f_p.

Pour établir l'indépendance linéaire des combinaisons partielles, il suffit d'établir l'indépendance de celles qui portent sur les fonctions F_q appartenant à une même classe; or ceci est une conséquence immédiate de la propriété des déterminants extraits du tableau des $a_{p,q}$.

16. Ce résultat peut être précisé comme suit.

Théorème V. — *S'il n'existe entre les* $n+1$ *fonctions* f_q *que* λ *relations linéaires homogènes indépendantes au plus* ($\lambda < n$), *le nombre de combinaisons exceptionnelles* (*linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$) *que peuvent présenter ces fonctions* f_q *est au plus égal à* $n+\lambda+1$.

En effet s'il y avait $n+\lambda+2$ combinaisons exceptionnelles entre les f_q, il resterait, en opérant comme précédemment, $\lambda+1$ combinaisons exceptionnelles proprement dites entre les F_q; or chacune d'elles doit comprendre une combinaison partielle identiquement nulle et ces dernières sont linéairement indépendantes. On est ainsi conduit à une contradiction qui établit le théorème annoncé. Celui-ci peut être amélioré; c'est là un point sur lequel nous reviendrons dans l'Appendice.

Le critère fondamental de normalité.

17. Nous étudierons maintenant des systèmes de fonctions holomorphes dans un domaine D.

Critère fondamental. — *Si entre les* $n+1$ *fonctions de chaque système d'une famille, il existe* $2n+1$ *mêmes combinaisons linéaires exceptionnelles, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$, *la famille est normale.*

Comme dans le n° 15, nous commencerons par faire une transformation linéaire homogène en introduisant les fonctions F_q au lieu des fonctions f_q. Pour chacun des nouveaux systèmes nous aurons n combinaisons linéaires exceptionnelles proprement dites.

Soit alors $F^{(k)}(z)$ une suite de systèmes de la famille. Les fonctions $F_0, F_1, \ldots, F_n$ se répartissent en un certain nombre de classes, chacune de celles-ci comprenant au moins une fonction de première catégorie et éventuellement des fonctions de seconde catégorie caractérisées par les propriétés suivantes : dans chaque classe, les fonctions de première catégorie (si elles sont plusieurs) ont des rapports mutuels qui convergent uniformément vers des limites qui ne

sont ni la constante zéro, ni la constante ∞, tandis que les rapports des fonctions de seconde catégorie à celles de première tendent uniformément vers zéro.

A chacune de ces classes, et pour chaque combinaison exceptionnelle, correspond une combinaison partielle. Le quotient de celle-ci par une fonction de première catégorie de la classe convergente converge uniformément vers une fonction limite qui ne peut être la constante zéro que pour $n-1$ combinaisons partielles au plus, en raison de l'indépendance linéaire de ces dernières. Pour l'une des n combinaisons exceptionnelles, aucune des combinaisons partielles ne conduit donc à une fonction limite identiquement nulle. Soient $F_{p_1}\Phi_1$, $F_{p_2}\Phi_2$, ..., $F_{p_c}\Phi_c$, les combinaisons partielles correspondantes, en désignant par F_{p_1} une fonction de première catégorie de la première classe, par F_{p_2} une fonction de première catégorie de la seconde classe, etc. L'expression

$$F_{p_1}^{(k)}\Phi_1^{(k)} + F_{p_2}^{(k)}\Phi_2^{(k)} + \ldots + F_{p_c}^{(k)}\Phi_c^{(k)}$$

ne s'annule pas dans D et les $\Phi_q^{(k)}$ tendent uniformément vers des limites $\Phi_q^{(0)}$ qui ne sont ni la constante zéro, ni la constante ∞. Si nous écartons du domaine D les voisinages des zéros des fonctions $\Phi_q^{(0)}$, il nous reste un domaine D* dans lequel les fonctions $F_{p_q}^{(k)}\Phi_q^{(k)}$ ne s'annulent pas dès que k est assez grand. Un théorème de M. Henri Cartan (1) montre qu'on peut extraire de la suite $F^{(k)}$ une suite partielle $F^{(n_k)}$ pour laquelle le rapport de deux des fonctions $F_{p_q}^{(n_k)}\Phi_q^{(n_k)}$ converge uniformément dans D*; il en sera de même du rapport des deux fonctions $F_{p_q}^{(n_k)}$ correspondantes; mais, comme ce rapport est holomorphe dans D, la propriété subsiste dans tout ce domaine. D'une suite $F^{(k)}$ donnant lieu à $c>1$ classes, nous extrayons ainsi une suite partielle relativement à laquelle deux de ces classes peuvent être réunies en une seule. En recommençant le raisonnement un nombre suffisant de fois, on parvient à extraire finalement une suite partielle donnant lieu à une seule classe.

Cette suite de systèmes, que nous désignerons encore par $F^{(k)}$ pour ne pas alourdir les notations, est uniformément convergente. En effet, on majore la quantité

$$[F^{(k)}, F^{(k+l)}]^2 = \sum \frac{|F_i^{(k)}F_j^{(k+l)} - F_i^{(k+l)}F_j^{(k)}|^2}{\sum |F_i^{(k)}|^2 \sum |F_j^{(k+l)}|^2}$$

en remplaçant le terme général de la somme par

$$\frac{|F_i^{(k)}F_j^{(k+l)} - F_i^{(k+l)}F_j^{(k)}|^2}{(|F_i^{(k)}|^2 + |F_j^{(k)}|^2)(|F_i^{(k+l)}|^2 + |F_j^{(k+l)}|^2)},$$

ce que l'on fera si F_i et F_j n'appartiennent pas tous deux à la seconde catégorie, ou par

$$\frac{|F_i^{(k)}F_j^{(k+l)} - F_i^{(k+l)}F_j^{(k)}|^2}{|F_0^{(k)}|^2 |F_0^{(k+l)}|^2} = \left|\frac{F_i^{(k)}}{F_0^{(k)}}\,\frac{F_j^{(k+l)}}{F_0^{(k+l)}} - \frac{F_i^{(k+l)}}{F_0^{(k+l)}}\,\frac{F_j^{(k)}}{F_0^{(k)}}\right|^2,$$

(1) H. CARTAN, *Sur les systèmes de fonctions...* (*loc. cit.*), théorème VII, p. 312.

ce que l'on fera si F_i et F_j appartiennent à la seconde catégorie, F_0 étant supposé ne pas lui appartenir. Toutes ces expressions tendent uniformément vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, quel que soit l positif; c'est évident pour celles de la dernière sorte, tandis que, pour celles de la première, c'est une conséquence du critère classique de Cauchy, compte tenu de la convergence uniforme de $\frac{F_i}{F_j}$. Il en résulte que l'expression $[F^{(k)}, F^{(k+l)}]$ tend uniformément vers zéro et, en vertu de l'extension que nous avons donnée au critère de Cauchy, que la suite des systèmes $F^{(k)}$ est uniformément convergente (¹).

La famille des systèmes $F(z)$ est donc normale; par conséquent, la famille des systèmes $f(z)$ l'est aussi, ce qui achève la démonstration.

18. Au lieu de supposer l'existence de $2n+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, supposons seulement qu'il y en ait $n+\lambda+1$ et reprenons le raisonnement du numéro précédent. Nous ne mettons plus en évidence que λ combinaisons exceptionnelles proprement dites entre les F_η. Et le raisonnement pourra se poursuivre à moins que chacune d'elles ne donne lieu à une combinaison partielle qui, divisée par une fonction de première catégorie de la classe correspondante, converge uniformément vers zéro. Dans ce cas, la combinaison exceptionnelle

$$a_{p,0}F_0+a_{p,1}F_1+\ldots+a_{p,n}F_n$$

donne donc naissance à une expression

$$\frac{b_{p,0}F_0+b_{p,1}F_1+\ldots+b_{p,n}F_n}{\sqrt{|F_0|^2+|F_1|^2+\ldots+|F_n|^2}} \tag{6}$$

qui converge uniformément vers zéro et où les $b_{p,q}$ sont respectivement égaux aux $a_{p,q}$ ou à zéro. Si l'on remarque que la propriété de la combinaison partielle considérée exige que celle-ci ait au moins deux termes (de première catégorie) on voit que, dans les expressions (6), il y a au moins un coefficient $b_{p,q}$ qui est nul et il y en a deux au moins qui ne le sont pas. D'autre part, étant donnée la répartition en classes, deux expressions telles que (6) ont des coefficients $b_{p,q}$ non nuls qui correspondent au même ensemble de valeurs q ou à des ensembles sans valeur commune.

Théorème VI. — *Lorsqu'une famille présente $n+\lambda+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, de toute suite de systèmes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui*

ou bien est uniformément convergente:

(¹) Cette dernière propriété rattache aux nôtres les idées de M. Henri Cartan. Pour qu'une suite soit uniformément convergente à notre sens, il faut et il suffit qu'elle donne lieu à une seule classe.

ou bien est telle qu'il existe au moins λ *expressions de la forme*

$$(7) \qquad \frac{\beta_{p,0} f_0 + \beta_{p,1} f_1 + \ldots + \beta_{p,n} f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants (ces numérateurs appartiennent même à un ensemble fini de même nature qu'on peut former lorsqu'on connaît les combinaisons exceptionnelles).

Ce théorème conduit immédiatement à des critères de normalité sur lesquels nous ne nous attarderons pas.

Le cas $\lambda = 1$ est particulièrement simple. Étudions-le avec plus de détails. Soient

$$F_p = \alpha_{p,0} f_0 + \alpha_{p,1} f_1 + \ldots + \alpha_{p,n} f_n \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$$

les combinaisons exceptionnelles. La combinaison F_{n+1} s'exprime en fonction de F_0, $F_1, \ldots, F_n$ et les combinaisons partielles Φ possibles s'obtiennent en résolvant la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,n} & \theta_0 F_0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} & \theta_1 F_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} & \theta_n F_n \\ \alpha_{n+1,0} & \alpha_{n+1,1} & \ldots & \alpha_{n+1,n} & \Phi \end{vmatrix} = 0,$$

où les θ_p sont égaux à zéro ou à 1, l'un au moins étant effectivement égal à zéro, deux au moins égaux à 1. En résolvant, on voit que ces combinaisons, définies à un facteur constant près, sont données par

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,n} & \theta_0 F_0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} & \theta_1 F_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} & \theta_n F_n \\ \alpha_{n+1,0} & \alpha_{n+1,1} & \ldots & \alpha_{n+1,n} & \theta_{n+1} F_{n+1} \end{vmatrix},$$

où $\theta_{n+1} = 0$ et où les autres θ_p satisfont aux conditions précédemment énoncées. Remarquons que, si l'on remplace par zéro tous les θ_p égaux à 1 et par 1 tous les θ_p égaux à zéro, on obtient une nouvelle expression qui, ajoutée à (8), donne un résultat identiquement nul. On peut donc dire finalement que *le déterminant* (8), *où tous les* θ_p *sont égaux à zéro ou à* 1, *deux au moins étant effectivement égaux à zéro et deux à* 1, *fournit le numérateur de l'expression* (7) *asymptotiquement nulle.*

Si $\lambda > 1$, on associe les combinaisons exceptionnelles $n+2$ à $n+2$ et l'on opère comme précédemment. On obtient ainsi $C_{n+1+\lambda}^{n+2}$ expressions (7) asymptotiquement nulles, parmi lesquelles on peut en choisir λ qui sont linéairement indépendantes; pour former celles-ci systématiquement il suffira d'associer successivement chacune de λ des combinaisons exceptionnelles aux $n+1$ autres.

19. Considérons une suite dont chaque système présente $2n+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles; mais plaçons-nous dans le cas où ces

combinaisons varient avec le système considéré, leurs coefficients $\alpha_{p,q}^{k}$ tendant vers les quantités $\alpha_{p,q}^{*}$ satisfaisant aux conditions imposées antérieurement aux coefficients $\alpha_{p,q}$ (alors fixes) eux-mêmes. Le raisonnement qui nous a permis d'établir le critère fondamental peut être repris mot pour mot, et l'on voit ainsi que de la suite considérée on peut extraire une suite partielle uniformément convergente. On en déduit l'extension suivante du critère fondamental :

Si, entre les $n+1$ fonctions de chaque système d'une famille, il existe $2n+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles

$$\alpha_{p,0}^{(k)} f_0^{(k)} + \alpha_{p,1}^{(k)} f_1^{(k)} + \ldots + \alpha_{p,n}^{(k)} f_n^{(k)} \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2n)$$

variables avec le système considéré, mais dont les coefficients sont tels que toutes les expressions

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{p_0,0}^{(k)} & \alpha_{p_0,1}^{(k)} & \ldots & \alpha_{p_0,n}^{(k)} \\ \alpha_{p_1,0}^{(k)} & \alpha_{p_1,1}^{(k)} & \ldots & \alpha_{p_1,n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p_n,0}^{(k)} & \alpha_{p_n,1}^{(k)} & \ldots & \alpha_{p_n,n}^{(k)} \end{vmatrix}}{\sqrt{\Sigma |\alpha_{p_0,i}^{(k)}|^2 \Sigma |\alpha_{p_1,i}^{(k)}|^2 \ldots \Sigma |\alpha_{p_n,i}^{(k)}|^2}}$$

demeurent en module supérieures à une borne positive fixe, la famille est normale.

En effet, on peut toujours supposer que les combinaisons exceptionnelles sont normées, c'est-à-dire que $\Sigma |\alpha_{p,i}^{(k)}|^2 = 1$. Étant donnée une suite de systèmes, il est alors possible d'en extraire une suite partielle dont les coefficients $\alpha_{p,q}^{(k)}$ tendent vers des limites $\alpha_{p,q}^{*}$ et l'on retombe sur le cas que nous venons d'étudier.

On étendra de même le théorème VI relatif au cas où il y a seulement $n+\lambda+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles; il interviendra alors des quantités $b_{p,q}^{(k)}$ et des quantités $\beta_{p,q}^{(k)}$ variables avec le système considéré; ces dernières tendront vers des limites $\beta_{p,q}^{*}$.

Si, entre les $n+1$ fonctions de chaque système d'une famille, il existe $n+\lambda+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, variables avec le système considéré mais satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème précédent, de toute suite de systèmes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui

ou bien est uniformément convergente;
ou bien est telle qu'il existe λ expressions de la forme

$$\frac{\beta_{p,0}^{*} f_0 + \beta_{p,1}^{*} f_1 + \ldots + \beta_{p,n}^{*} f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants.

Extensions des théorèmes de Schottky et Landau.

20. THÉORÈME VII. — *Soit un système de $n+1$ fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ holomorphes dans le cercle $|z|<R$ et y présentant $2n+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$*

$$\alpha_{p,0}f_0+\alpha_{p,1}f_1+\ldots+\alpha_{p,n}f_n \qquad (p=0,1,\ldots,2n).$$

Dans le cercle $|z|<r<R$, l'expression

$$\delta_p(z)=\frac{|\alpha_{p,0}f_0+\alpha_{p,1}f_1+\ldots+\alpha_{p,n}f_n|}{\sqrt{|f_0|^2+|f_1|^2+\ldots+|f_n|^2}\sqrt{|\alpha_{p,0}|^2+|\alpha_{p,1}|^2+\ldots+|\alpha_{p,n}|^2}}$$

est supérieure à une borne positive ne dépendant que de $\delta_p(0)$ supposé positif, de $\frac{r}{R}$ et des $\alpha_{p,q}$. Dans cet énoncé, la connaissance de $\delta_p(0)$ peut être remplacée par celle d'un nombre positif qui lui soit inférieur.

THÉORÈME VIII. — *Dans les mêmes conditions, les expressions*

$$R\frac{|f_pf'_q-f_qf'_p|}{\Sigma|f_i|^2},\quad \ldots\quad R^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}\frac{\Delta_{p_1,p_2,\ldots,p_\lambda}}{[\Sigma|f_i|^2]^{\frac{\lambda}{2}}},\quad \ldots,\quad R^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\Delta_{0,1,2,\ldots,n}}{[\Sigma|f_i|^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

présentent, au point $z=0$, une borne supérieure ne dépendant que des $\alpha_{p,q}$.

Ces propositions, qui sont des extensions au cas d'un système de $n+1$ fonctions holomorphes des théorèmes de Schottky et Landau relatifs à une fonction méromorphe, se déduisent immédiatement du critère fondamental et des théorèmes I et II appliqués au système $f(Rz)$.

21. Ici, comme dans le cas d'une seule fonction méromorphe, le théorème VII peut être démontré à partir du théorème VIII; cette démonstration, que nous allons indiquer, permet d'ailleurs d'en préciser l'énoncé.

Le théorème VIII nous apprend en effet que

$$\frac{\Sigma|f_i(0)f'_j(0)-f_j(0)f'_i(0)|^2}{[\Sigma|f_i(0)|^2]^2}<\frac{K^2}{R^2},$$

où K est une constante ne dépendant que des $\alpha_{p,q}$. En appliquant ce résultat au système des fonctions

$$f_i\left[\frac{R^2(z_0-z)}{R^2-z\bar{z}_0}\right]$$

et, en supprimant ensuite l'indice de z_0, on obtient

$$\frac{\Sigma|f_i(z)f'_j(z)-f_j(z)f'_i(z)|^2}{[\Sigma|f_i(z)|^2]^2}<\frac{K^2R^2}{[R^2-|z|^2]^2}. \tag{9}$$

D'autre part on peut établir l'identité

$$\Delta \log \sqrt{\Sigma |f_i|^2} = 2 \frac{\Sigma |f_i f_j' - f_j f_i'|^2}{[\Sigma |f_i|^2]^2}. \tag{10}$$

Pour cela, on pose $z = x + iy$ et l'on remarque que toute fonction holomorphe vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f' \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = if'.$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \sqrt{\Sigma |f_i|^2} = \frac{\Sigma \mathcal{R}(f_i \overline{f_i'})}{\Sigma |f_i|^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \log \sqrt{\Sigma |f_i|^2} = \frac{\Sigma \mathcal{I}(f_i \overline{f})}{\Sigma |f_i|^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \sqrt{\Sigma |f_i|^2} = \frac{\Sigma [|f_i'|^2 + \mathcal{R}(f_i \overline{f_i'})]}{\Sigma |f_i|^2} - \frac{2[\mathcal{R}\Sigma(f_i \overline{f_i'})]^2}{[\Sigma |f_i|^2]^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \log \sqrt{\Sigma |f_i|^2} = \frac{\Sigma [|f_i'|^2 - \mathcal{R}(f_i \overline{f_i'})]}{\Sigma |f_i|^2} - \frac{2[\mathcal{I}\Sigma(f_i \overline{f_i'})]^2}{[\Sigma |f_i|^2]^2},$$

d'où, finalement,

$$\frac{1}{2} \Delta \log \sqrt{\Sigma |f_i|^2} = \frac{\Sigma |f_i'|^2}{\Sigma |f_i|^2} - \frac{|\Sigma f_i \overline{f_i'}|^2}{[\Sigma |f_i|^2]^2} = \frac{\Sigma |f_i f_j' - f_j f_i'|^2}{[\Sigma |f_i|^2]^2}.$$

Les inégalités (9) et (10) entraînent

$$0 < \Delta \log \frac{1}{\delta_p(z)} < \frac{2K^2 R^2}{[R^2 - |z|^2]^2}.$$

La formule de Green

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} d\varphi - \log \frac{1}{\delta_p(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_1} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \Delta \log \frac{1}{\delta_p(te^{i\varphi})} t \, dt \, d\varphi$$

donne alors

$$\log \frac{1}{\delta_p(0)} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} d\varphi < \log \frac{1}{\delta_p(0)} + \frac{K^2}{2} \log \frac{R^2}{R^2 - r_1^2}.$$

La première partie de cette double inégalité peut s'écrire plus généralement (1),

$$\log \frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \qquad \text{pour } r < r_1,$$

d'où, *a fortiori*, puisque $\log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})}$ reste positif,

$$\log \frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{r_1 + r}{r_1 - r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} d\varphi.$$

(1) Une transformation homographique en lui-même de l'intérieur du cercle $|z| < r_1$ permet de passer du cas particulier au cas général. On peut d'ailleurs éviter de faire ce calcul en remarquant que la fonction $\log \frac{1}{\delta_p(z)}$ est sousharmonique.

En tenant compte de la seconde partie de la double inégalité, il vient

$$\log\frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{r_1+r}{r_1-r}\left[\log\frac{1}{\delta_p(0)} + \frac{K^2}{2}\log\frac{R^2}{R^2-r_1^2}\right].$$

Si l'on choisit alors $r_1 = \sqrt{Rr}$, on en déduit aussitôt

$$\log\frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{4R}{R-r}\left[\log\frac{1}{\delta_p(0)} + \frac{K^2}{2}\log\frac{R}{R-r}\right]. \tag{11}$$

C'est l'inégalité annoncée par le théorème VII (¹). Le résultat que nous venons d'obtenir est partiellement quantitatif puisque l'on voit comment interviennent $\frac{r}{R}$ et $\delta_p(0)$; par contre, K est une fonction complètement inconnue des $\alpha_{p,q}$.

L'inégalité (11) peut être sensiblement améliorée pour les valeurs de r voisines de R. Soit, en effet, le cercle de centre $\frac{R}{2}e^{i\theta}$ et de rayon $\frac{R}{2}$. Dans ce cercle, jouant le rôle tenu tout à l'heure par le cercle de centre O et de rayon R, nous pouvons reprendre les mêmes considérations. Nous devons alors, pour $0<\rho<\frac{R}{2}$, évaluer l'intégrale double

$$\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\Delta\log\frac{1}{\delta_p\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}+te^{i\varphi}\right)}\,t\,dt\,d\varphi < \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{2K^2R^2}{\left(R^2-\left|\frac{R}{2}e^{i\theta}+te^{i\varphi}\right|^2\right)^2}\,t\,dt\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\rho}\frac{4\pi K^2R^2\left(\frac{3}{4}R^2-t^2\right)t\,dt}{\left[\left(\frac{9}{4}R^2-t^2\right)\left(\frac{R^2}{4}-t^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}} < \int_0^{\rho}\frac{3\pi K^2Rt\,dt}{2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R^2}{4}-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3\pi K^2R}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{4}-\rho^2}}-\frac{2}{R}\right] < \frac{3\pi\sqrt{2}K^2}{R}\,\frac{\rho^2}{\sqrt{\frac{R^2}{4}-\rho^2}}.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho}\frac{3\pi\sqrt{2}K^2}{R}\,\frac{\rho^2}{\sqrt{\frac{R^2}{4}-\rho^2}}\,\frac{d\rho}{\rho} = \frac{3K^2}{R\sqrt{2}}\left[-\sqrt{\frac{R^2}{4}-\rho^2}\right]_0^{\rho} < \frac{3K^2}{2\sqrt{2}},$$

(¹) Nous n'avons fait, au fond, qu'adapter au cas d'un système de fonctions holomorphes, un calcul classique dans l'étude d'une fonction [$n=1$; *cf.*, par exemple, Dufresnoy, *Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde* (*Annales de l'École Normale supérieure*, (3), 58, 1941, § 31]. Par contre, dans le cas particulier d'une seule fonction, l'amélioration que nous donnons dans la suite n'a jamais été établie, à notre connaissance, par cette méthode simple.

on voit aussitôt que les mêmes calculs, qui nous avaient conduit à l'inégalité (11), nous conduisent maintenant à

$$\log\frac{1}{\delta_p\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}+\rho e^{i\varphi}\right)}<\frac{4R}{R-2\rho}\left[\log\frac{1}{\delta_p\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}\right)}+\frac{3K^2}{2\sqrt{2}}\right],$$

qui, compte tenu de l'inégalité (11) appliquée à $r=\frac{R}{2}$, entraîne

$$\log\frac{1}{\delta_p\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}+\rho e^{i\varphi}\right)}<\frac{4R}{R-2\rho}\left[8\log\frac{1}{\delta_p(0)}+4K^2\log 2+\frac{3K^2}{2\sqrt{2}}\right].$$

Si nous prenons $\rho=\theta$ et si nous posons $\frac{R}{2}+\rho=r$, il vient, pour $\frac{R}{2}<r<R$,

$$\log\frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})}<\frac{2R}{R-r}\left[8\log\frac{1}{\delta_p(0)}+\left(4\log 2+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)K^2\right]. \qquad (11\ bis)$$

On voit aussitôt que cette inégalité est encore satisfaite pour $r<\frac{R}{2}$, mais qu'elle est alors un peu moins précise que (7). En résumé, *le théorème* VII *peut donc se traduire par une inégalité de la forme*

$$\log\frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})}<\frac{R}{R-r}\left[A\log\frac{1}{\delta_p(0)}+BK^2\right],$$

où A *et* B *sont des constantes numériques* $\left(A<16,\ B<8\log 2+\frac{3}{\sqrt{2}}<8\right)$ *et* K *une quantité ne dépendant que des* $\alpha_{p,q}$.

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX FONCTIONS ALGÉBROÏDES.

Définitions et premières propriétés.

22. Dans un domaine D, une fonction algébroïde $w=w(z)$ à n branches est définie par une équation

$$f_0w^n+f_1w^{n-1}+\ldots+f_n=0,$$

où $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ sont des fonctions holomorphes dans ce domaine. On obtient la même algébroïde si l'on multiplie les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ par une fonction arbitraire, autrement dit si l'on remplace le système f des fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ par un système équivalent.

23. Notre étude des algébroïdes reposera essentiellement sur le lemme suivant :

LEMME IV. — *Soient deux équations de degré n*

$$P(w) \equiv a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$
$$P^*(w) \equiv a_0^* w^n + a_1^* w^{n-1} + \ldots + a_n^* = 0;$$

la première, dont les coefficients constituent le système a, présente les racines w_1, w_2, ..., w_n; *la seconde, dont les coefficients constituent le système* a^*, *présente les racines* w_1^*, w_2^*, ..., w_n^*. *A tout nombre* ε *positif donné on peut faire correspondre un nombre* η (dépendant de ε et de n) *tel que, toutes les fois que* $[a, a^*] < \eta$, *les racines des deux équations puissent être associées deux à deux de sorte que la distance cordale sphérique de deux racines associées soit inférieure à* ε. Si, par exemple, w_p et w_p^* sont associées, on a

$$\frac{|w_p^* - w_p|}{\sqrt{1+|w_p^*|^2}\sqrt{1+|w_p|^2}} < \varepsilon.$$

Et réciproquement, la distance des systèmes de coefficients est arbitrairement petite lorsque les racines des deux équations peuvent être associées deux à deux de façon que la distance sphérique de deux racines associées soit suffisamment petite.

Nous allons établir ce lemme qui précise la propriété bien connue dite de la *continuité des racines d'une équation algébrique*. Il s'agit ici, en quelque sorte, d'une continuité uniforme.

Nous utiliserons une adaptation à la sphère de Riemann d'un théorème de M. Henri Cartan (1) que l'on peut énoncer ainsi : « Étant donnés n points w_1, w_2, ..., w_n, et un nombre positif h, on a

$$\prod \frac{|w - w_i|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_i|^2}} > h^n, \tag{12}$$

quel que soit w sur la sphère de Riemann, sauf peut-être dans des calottes en nombre n au plus, dont la somme des rayons cordaux (2) est inférieure à $2eh$ ». En remarquant que des calottes, dont la somme Σr des rayons cordaux est inférieure à 1, ne peuvent recouvrir toute la sphère, car la somme de leurs aires est

$$\pi \Sigma r^2 < \pi (\Sigma r)^2 < \pi.$$

(1) H. CARTAN, *Sur les systèmes de fonctions...* (*loc. cit.*), théorème III, p. 273.

On reprendra mot pour mot sur la sphère de Riemann la démonstration donnée par M. Henri Cartan dans le cas du plan complexe. On peut d'ailleurs ne pas faire appel à ce théorème et remarquer simplement que l'inégalité (12) a lieu à l'extérieur de n calottes sphériques ayant les points z_k pour pôles et h pour rayons cordaux. Mais les résultats que l'on obtient alors sont sensiblement moins précis.

(2) Une calotte est limitée par une circonférence C dont l'un P des pôles est situé dans la calotte. Le rayon cordal est la distance cordale à P des points de la circonférence C.

nous en déduisons qu'il existe au moins une valeur $w = w_0$ pour laquelle

$$\prod \frac{|w - w_l|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_l|^2}} > \left(\frac{1}{2e}\right)^n.$$

Considérons alors le polynome

$$Q(w) \equiv \prod \frac{w - w_l}{\sqrt{1+|w_l|^2}} \equiv \alpha_0 w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \ldots + \alpha_n.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre que

$$\Sigma |\alpha_l|^2 > \frac{|Q(w)|^2}{1+|w|^2+\ldots+|w|^{2n}} > \frac{|Q(w)|^2}{(1+|w|^2)^n},$$

quel que soit w; en prenant $w = w_0$, on en tire

$$\Sigma |\alpha_l|^2 > \left(\frac{1}{2e}\right)^{2n}.$$

D'autre part, de l'inégalité évidente

$$\frac{|w - w_p|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_p|^2}} < 1,$$

on déduit aussitôt $|Q(w)|^2 < (1+|w|^2)^n$ pour toutes les valeurs de w; en prenant la moyenne de $|Q(w)|^2$ sur le cercle $|w| = 1$, on obtient

$$\Sigma |\alpha_l|^2 < 2^n.$$

Revenons maintenant aux polynomes $P(w)$ et $P^*(w)$. Nous pouvons remplacer leurs systèmes de coefficients a et a^* par des systèmes équivalents b et b^* convenablement normés, c'est-à-dire tels que

$$\Sigma |b_l|^2 = 1, \qquad \Sigma |b_l^*|^2 = 1, \qquad \Sigma |b_l^* - b_l|^2 < 2|b, b^*|^2 = 2|a, a^*|^2.$$

Les polynomes $P(w)$ et $P^*(w)$ sont ainsi changés en des polynomes proportionnels $R(w)$ et $R^*(w)$. Si nous posons

$$R^*(w) = R(w) + S(w),$$

il vient

$$|S(w)|^2 < \Sigma |b_l^* - b_l|^2 \Sigma |w|^{2l} < 2|a, a^*|^2 (1+|w|^2)^n.$$

D'autre part

$$|R(w)| = \frac{|Q(w)|}{\sqrt{\Sigma |\alpha_l|^2}} > \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} |Q(w)|.$$

On aura donc certainement $|S(w)| < |R(w)|$ en tous les points de la sphère de Riemann en lesquels

$$\frac{Q(w)}{(1+|w|^2)^{\frac{n}{2}}} \equiv \prod \frac{|w - w_l|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_l|^2}} > 2^{\frac{n+1}{2}} |a, a^*|.$$

D'après la proposition indiquée au début, ceci aura lieu sauf en des points situés dans des calottes dont la somme des rayons cordaux est inférieure à $2e\sqrt{2}.2^{\frac{1}{2n}}[a, a^*]^{\frac{1}{n}} < 4e[a, a^*]^{\frac{1}{n}}$. Le théorème de Rouché nous montre enfin que, dans chacun des domaines connexes formés par la réunion de ces calottes, les deux équations $R(w) = 0$ et $R^*(w) = 0$ ont le même nombre de racines. Il en résulte qu'il est possible d'associer deux à deux les racines des deux équations données de sorte que la distance cordale sphérique de deux racines associées soit inférieure à

$$\varepsilon = 8e[a, a^*]^{\frac{1}{n}}.$$

La proposition directe se trouve ainsi démontrée.

Pour établir la réciproque, nous partons de

$$\frac{|w_p^* - w_p|}{\sqrt{1+|w_p|^2}\sqrt{1+|w_p^*|^2}} < \varepsilon < 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Une transformation homographique

$$W = e^{i\theta_0}\frac{w - a}{1 + w\bar{a}} \tag{13}$$

(rotation sur elle-même de la sphère de Riemann) qui change w_p et w_p^* en W_p et W_p^*, satisfait à la relation

$$\frac{W - W_p}{\sqrt{1+|W|^2}\sqrt{1+|W_p|^2}} = e^{i(\theta_0 - \varphi_0)}\frac{w - w_p}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_p|^2}}$$

avec

$$\varphi_0 = \arg(1 + w\bar{a}) + \arg(1 + w_p\bar{a}).$$

Il en résulte que

$$\left|\frac{W - W_p}{\sqrt{1+|W|^2}\sqrt{1+|W_p|^2}} - \frac{W - W_p^*}{\sqrt{1+|W|^2}\sqrt{1+|W_p^*|^2}}\right|$$
$$= \left|\frac{w - w_p}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_p|^2}} - e^{i\theta_p}\frac{w - w_p^*}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_p^*|^2}}\right|$$

avec

$$\theta_p = \arg(1 + w_p\bar{a}) - \arg(1 + w_p^*\bar{a}).$$

Si l'on choisit alors la transformation (13) de façon que $W_p^* = -W_p$, ces quantités ayant un module inférieur à 1, on met en évidence un nombre réel θ_p, indépendant de w, et tel que

$$\left|\frac{w - w_p}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_p|^2}} - e^{i\theta_p}\frac{w - w_p^*}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|w_p^*|^2}}\right|$$
$$= \frac{|W_p^* - W_p|}{\sqrt{1+|W|^2}\sqrt{1+|W_p|^2}} < \frac{\sqrt{2}\,|W_p^* - W_p|}{\sqrt{1+|W_p|^2}\sqrt{1+|W_p^*|^2}} < \varepsilon\sqrt{2}.$$

En remarquant qu'une différence de deux produits peut s'écrire

$$\prod_{i=1}^{n} d_i - \prod_{j=1}^{n} d_j^* = \sum_{k=1}^{n} \left[(d_k - d_k^*) \prod_{1 \leq i < k} d_i \prod_{k < j \leq n} d_j^* \right],$$

on déduit immédiatement de l'inégalité précédente qu'il existe un nombre réel $\theta = \Sigma \theta_i$, indépendant de w, et tel que

$$\left| \prod \frac{w - w_i}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |w_i|^2}} - e^{i\theta} \prod \frac{w - w_i^*}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |w_i^*|^2}} \right| < n\varepsilon\sqrt{2},$$

soit

$$|Q(w) - e^{i\theta} Q^*(w)| < n\varepsilon\sqrt{2}(1 + |w|^2)^{\frac{n}{2}}.$$

En prenant la moyenne sur le cercle $|w| = 1$ du carré du premier membre, il vient

$$\Sigma |\alpha_i - e^{i\theta}\alpha_i^*|^2 < 2^{n+1} n^2 \varepsilon^2,$$

et, par conséquent, d'après l'inégalité (3 *bis*),

$$|\alpha, e^{i\theta}\alpha^*|^2 < \frac{\Sigma |\alpha_i - e^{i\theta}\alpha_i^*|^2}{\sqrt{\Sigma |\alpha_i|^2 \Sigma |\alpha_i^*|^2}} < \frac{2^{n+1} n^2 \varepsilon^2}{\left(\frac{1}{2e}\right)^{2n}},$$

soit *a fortiori*

$$|\alpha, \alpha^*| < (5e)^n \varepsilon,$$

ce qui démontre la réciproque.

24. Voici une conséquence immédiate de la propriété précédente.

Lemme V. — *Si l'équation*

$$P(w) \equiv a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ne présente pas plus de p racines dont la distance cordale sphérique à ∞ soit inférieure à ε, on a

$$\frac{\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2} > \left(\frac{\varepsilon}{8e}\right)^{2n}.$$

Réciproquement, il n'y a pas plus de p racines dont la distance cordale sphérique à ∞ soit inférieure à

$$\left(\frac{1}{5e}\right)^n \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2}}.$$

Pour démontrer cette proposition il suffit de considérer l'équation

$$P^*(w) \equiv a_0^* w^n + a_1^* w^{n-1} + \ldots + a_n^* = 0,$$

où $a_0^* = a_1^* = \ldots = a_p^* = 0$. On obtient immédiatement

$$|a, a^*|^2 \geq \frac{\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2},$$

l'égalité ayant lieu si l'on choisit $a_k^* = a_k$ pour $k = p+1, p+2, \ldots, n$.

En faisant ce choix et en appliquant le lemme IV (proposition directe), on voit que l'équation $P(w) = 0$ présente au moins $p+1$ racines dont la distance à ∞ est inférieure à

$$8e \left[\frac{\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2}{\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2} \right]^{\frac{1}{2n}}$$

C'est, sous une autre forme, la première partie du lemme à établir.

En choisissant maintenant les a_k^* ($k = p+1, p+2, \ldots, n$) de façon que l'équation $P^*(w) = 0$ présente, en dehors de ses $p+1$ racines infinies, $n-p-1$ racines communes avec l'équation $P(w) = 0$, et en appliquant le lemme IV (proposition réciproque) on voit que, si les $p+1$ autres racines de l'équation $P(w) = 0$ sont à une distance de ∞ moindre que ε, on a

$$\frac{\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2}{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2} < (5e)^{2n} \varepsilon^2.$$

C'est, énoncée sous une autre forme, la seconde partie du lemme.

25. Nous serons amenés dans la suite à utiliser le cas particulier $p = 0$ du lemme V. On peut établir par un calcul direct la proposition plus précise suivante.

LEMME VI. — *Si l'équation*

$$P(w) \equiv a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ne présente aucune racine de module supérieur à M, *on a*

$$\frac{|a_0|^2}{\sum |a_i|^2} > \left(\frac{1}{1+M} \right)^{2n}.$$

Réciproquement, aucune racine n'a un module supérieur à M' *avec*

$$\frac{|a_0|^2}{\Sigma|a_i|^2} = \frac{n}{1+M'^2}.$$

En effet, si toutes les racines ont un module inférieur à M, on a

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| < C_n^1 M, \qquad \left|\frac{a_2}{a_0}\right| < C_n^2 M^2, \qquad \ldots, \qquad \left|\frac{a_n}{a_0}\right| < M^n;$$

d'où

$$\frac{|a_0|^2}{\Sigma|a_i|^2} > \frac{1}{1+(C_n^1)^2M^2+(C_n^2)^2M^4+\ldots+M^{2n}} > \frac{1}{(1+M)^{2n}}.$$

Réciproquement, si nous posons

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{n\Sigma|a_i|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+M'^2}},$$

nous définissons un nombre M' supérieur à 1 ; on obtient immédiatement

$$\frac{|a_0|}{\Sigma|a_i|} > \frac{1}{1+M'},$$

soit

$$|a_0| > \frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{M'}$$

et, *a fortiori*,

$$|a_0| > \frac{|a_1|}{M'} + \frac{|a_2|}{M'^2} + \ldots + \frac{|a_n|}{M'^n}.$$

Il en résulte que, pour $|w| \geq M'$, on a

$$|a_0 w^n| > |a_1 w^{n-1} + a_2 w^{n-2} + \ldots + a_n|,$$

donc $P(w) \neq 0$.

26. Définition. — *Soient deux équations* $P(w) = 0$ *et* $P^*(w) = 0$ *de degré n. Si l'on associe leurs racines deux à deux, on peut déterminer la borne supérieure des distances cordales sphériques des couples de racines ainsi associées. Nous appellerons distance des deux équations, le minimum de cette borne supérieure lorsqu'on fait toutes les associations possibles.*

Il résulte alors du lemme IV qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la distance de deux équations soit petite est que la distance de leurs systèmes de coefficients le soit.

Nous dirons qu'*une suite d'équations est convergente* et tend vers une équation limite, si la distance des équations de la suite à l'équation limite tend vers zéro. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la suite des systèmes de coefficients des équations soit convergente et tende vers le système de coefficients de l'équation limite.

27. Définition. — *Une suite de fonctions algébroïdes définies par les équations*

$$f_0^{(k)}w^n + f_1^{(k)}w^{n-1} + \ldots + f_n^{(k)} = 0, \tag{14}$$

où les $f_p^{(k)}(z)$ *sont holomorphes dans un domaine* D, *est dite* convergente *dans* D *si la suite des équations* (14) *est convergente en chaque point de ce domaine; elle est uniformément convergente dans l'intérieur de* D *et y présente la fonction multiforme définie par*

$$f_0^{(0)}w^n + f_1^{(0)}w^{n-1} + \ldots + f_n^{(0)} = 0 \tag{15}$$

comme limite si la distance des équations (14) *à l'équation* (15) *tend uniformément vers zéro quel que soit* z *dans un domaine* D' *quelconque complètement intérieur à* D.

Le lemme IV nous montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'algébroïdes soit convergente (ou uniformément convergente) est que la suite des systèmes de coefficients des équations qui les définissent soit elle-même convergente (ou uniformément convergente). Il résulte de ce qui a été dit au n° 9 que *la limite d'une suite d'algébroïdes uniformément convergente dans l'intérieur d'un domaine est une fonction algébroïde dans ce domaine.* De même, en s'appuyant sur le lemme I, on voit que. *si aucune des branches de l'algébroïde limite ne se réduit à la constante* a, *les points en lesquels les algébroïdes de la suite* (uniformément convergente) *prennent la valeur* a *tendent vers les points en lesquels l'algébroïde limite prend cette même valeur; en particulier, si les algébroïdes de la suite ne prennent pas la valeur* a, *il en est de même de l'algébroïde limite, à moins que l'une au moins des branches de celle-ci ne se réduise à la constante* a.

Définition. — *Une famille d'algébroïdes définies dans un domaine* D *y est normale si de toute suite infinie d'algébroïdes de la famille on peut extraire une suite partielle uniformément convergente dans l'intérieur de* D.

On peut énoncer un critère de normalité à partir de l'égale continuité. Nous dirons que des algébroïdes sont *également continues* dans l'intérieur d'un domaine D, si, à tout domaine D' complètement intérieur à D et à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre η_1 tel que les deux équations numériques obtenues à partir de l'équation de l'une quelconque de ces algébroïdes, en donnant à z deux valeurs arbitraires situées dans D' et dont la différence a un module moindre que η_1, soient à une distance inférieure à ε. Pour que des algébroïdes soient également continues, il faut et il suffit que leurs systèmes de coefficients le soient. D'où le

Premier critère de normalité. — *Pour qu'une famille d'algébroïdes soit normale dans un domaine* D, *il faut et il suffit qu'il y ait égale continuité dans l'intérieur de ce domaine.*

Donnons enfin, pour terminer cette section, une propriété des familles normales de fonctions algébroïdes.

THÉORÈME IX. — *Soit dans le cercle* $|z| < R$ *une famille normale d'algébroïdes à n branches, n'y prenant pas la valeur* ∞ *et dont toutes les branches ont des modules inférieurs à* M_0 *au point* $z = 0$. *Dans ces conditions, en chaque point du domaine* $|z| < r < R$, *toutes les branches ont des modules inférieurs à une borne ne dépendant que de r* (ainsi que de la famille considérée).

En utilisant la notion de famille normale d'algébroïdes, on pourrait donner une démonstration parallèle à celle du théorème I. Mais le plus simple est d'avoir recours à ce théorème lui-même en remarquant que le lemme VI nous ramène aussitôt à la considération de l'expression

$$\delta = \frac{|f_0|}{\sqrt{\Sigma |f_i|^2}},$$

qui est à l'origine supérieure à $(1 + M_0)^{-n}$.

Le critère fondamental de normalité.

28. Nous allons d'abord rappeler quelques propositions connues relatives aux algébroïdes dont le domaine d'existence est tout le plan fini. Ces propositions sont des applications immédiates des théorèmes établis dans la première section du Chapitre II; elles donnent le nombre maximum de valeurs exceptionnelles, c'est-à-dire de valeurs non prises par l'algébroïde.

THÉORÈME X (1). — *Une algébroïde à n branches dont le domaine d'existence est tout le plan fini ne peut présenter plus de* $2n$ *valeurs exceptionnelles à moins que toutes ses branches ne se réduisent à des constantes.*

S'il existe entre les coefficients de l'équation définissant une algébroïde une relation linéaire homogène, nous dirons que les branches de l'algébroïde satisfont à une relation involutive. La considération des relations involutives permet de préciser comme suit le théorème précédent.

THÉORÈME XI (2). — *Une algébroïde à n branches dont le domaine d'existence est tout le plan fini, et entre les branches de laquelle n'existent que* λ *relations involutives indépendantes* ($\lambda < n$), *ne peut présenter plus de* $n + \lambda + 1$ *valeurs exceptionnelles.*

---

(1) RÉMOUNDOS, *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* [*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, (2), 8, 1906, p. 1-72].

(2) TH. VAROPOULOS, *Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes* (*C. R. Acad. Sc.*, 177, 1923, p. 306; *Bulletin de la Soc. math. de France*, 53, 1925, p. 23-34).

29. Étudions maintenant les familles d'algébroïdes définies dans un domaine D. A cet effet, nous utiliserons les théorèmes de la deuxième section du Chapitre II.

CRITÈRE FONDAMENTAL. — *Les algébroïdes à n branches, définies dans un domaine* D *et y présentant* $2n+1$ *mêmes valeurs exceptionnelles, constituent une famille normale dans ce domaine.*

Cette proposition peut être précisée en introduisant la notion de relation involutive asymptotique. Nous dirons que les branches d'une suite d'algébroïdes

$$f_0^{(k)}w^n + f_1^{(k)}w^{n-1} + \ldots + f_n^{(k)} = 0$$

satisfont asymptotiquement dans un domaine à la relation involutive

$$\beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n = 0,$$

si l'expression

$$\frac{\beta_0 f_0^{(k)} + \beta_1 f_1^{(k)} + \ldots + \beta_n f_n^{(k)}}{\sqrt{|f_0^{(k)}|^2 + |f_1^{(k)}|^2 + \ldots + |f_n^{(k)}|^2}}$$

tend uniformément vers zéro dans le domaine considéré.

THÉORÈME XII. — *Lorsque les algébroïdes d'une famille présentent* $n+\lambda+1$ *mêmes valeurs exceptionnelles, de toute suite d'algébroïdes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui jouit de l'une des propriétés suivantes :*

ou bien elle est uniformément convergente;

ou bien les branches des algébroïdes de cette suite satisfont asymptotiquement à λ *relations involutives indépendantes.*

Ces relations involutives appartiennent à un ensemble fini qu'on peut former lorsqu'on connaît les valeurs exceptionnelles; c'est une conséquence des considérations du n° 18. Étudions de plus près cet ensemble. A cet effet, remarquons d'abord que la relation

$$\beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n = 0$$

se traduit entre les branches $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de l'algébroïde

$$f_0 w^n + f_1 w^{n-1} + \ldots + f_n = 0$$

par

$$\beta_0 - \beta_1 \Sigma w_i + \beta_2 \Sigma w_i w_j - \ldots + (-1)^n \beta_n w_1 w_2 \ldots w_n = 0,$$

ce qui justifie, d'ailleurs, le nom de *relation involutive* que nous lui avons donné.

Plaçons-nous alors dans le cas $\lambda = 1$. Si nous désignons par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ les $n+2$ valeurs exceptionnelles, nous savons (*cf.* n° 18) que l'involution asymptotiquement satisfaite peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha_0^n & \alpha_0^{n-1} & \ldots & 1 & \theta_0 \Sigma \alpha_0^i f_{n-i} \\ \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \ldots & 1 & \theta_1 \Sigma \alpha_1^i f_{n-i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n+1}^n & \alpha_{n+1}^{n-1} & \ldots & 1 & \theta_{n+1} \Sigma \alpha_{n+1}^i f_{n-i} \end{vmatrix} = 0.$$

où certains des θ_p sont égaux à 1 et les autres nuls. Dans ce déterminant remplaçons les $\Sigma\alpha_p^t f_{n-t}$ par les expressions

$$\alpha_p^n - \alpha_p^{n-1}\Sigma w_i + \alpha_p^{n-2}\Sigma w_i w_j - \ldots + (-1)^n w_1 w_2 \ldots w_n$$

pour donner à la relation sa forme involutive portant sur $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Il apparaît aussitôt que la relation est satisfaite si l'on donne respectivement à ces quantités les valeurs des α_p correspondant dans le déterminant à des θ_p non nuls, complétées par des valeurs arbitraires. En remarquant qu'on peut remplacer par zéro tous les θ_p égaux à 1 et par 1 tous les θ_p égaux à zéro sans altérer l'involution, on arrive finalement au résultat que voici.

Si $\lambda = 1$, les $n+2$ valeurs exceptionnelles α_p se partagent en deux groupes comprenant chacun deux valeurs au moins et tels que la relation involutive à n variables dont il est question dans le théorème XII *soit satisfaite lorsqu'on donne à ces variables les valeurs des α_p de l'un quelconque de ces groupes arbitrairement complété.*

On peut développer des considérations analogues pour $\lambda > 1$, auquel cas nous avons un système de λ relations involutives simultanées qu'on peut écrire, en désignant par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+\lambda}$ les $n+\lambda+1$ valeurs exceptionnelles,

$$\begin{vmatrix} \alpha_0^n & \alpha_0^{n-1} & \ldots & 1 & \theta_{0,q}\left[\alpha_0^n - \alpha_0^{n-1}\Sigma w_i + \alpha_0^{n-2}\Sigma w_i w_j - \ldots + (-1)^n w_1 w_2 \ldots w_n\right] \\ \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \ldots & 1 & \theta_{1,q}\left[\alpha_1^n - \alpha_1^{n-1}\Sigma w_i + \alpha_1^{n-2}\Sigma w_i w_j - \ldots + (-1)^n w_1 w_2 \ldots w_n\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n^n & \alpha_n^{n-1} & \ldots & 1 & \theta_{n,q}\left[\alpha_n^n - \alpha_n^{n-1}\Sigma w_i + \alpha_n^{n-2}\Sigma w_i w_j - \ldots + (-1)^n w_1 w_2 \ldots w_n\right] \\ \alpha_{n+q}^n & \alpha_{n+q}^{n-1} & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où $q = 1, 2, \ldots, \lambda$. Les θ sont égaux à zéro ou à 1 et cette propriété peut être précisée d'après ce que nous avons vu au n° 18; les nombres $0, 1, 2, \ldots, n$ se répartissent en plusieurs classes $C_1, C_2, \ldots$, comprenant respectivement $r_1, r_2, \ldots$ éléments, tandis que les λ premiers entiers se répartissent d'autre part en classes $D_1, \ldots$ comprenant respectivement $s_1, \ldots$ éléments, avec $s_1 < r_1, \ldots$; $\theta_{p,q}$ est égal à 1 si p et q appartiennent respectivement à des classes C et D de même indice, il est égal à zéro dans le cas contraire. Considérons alors les valeurs exceptionnelles α et répartissons-les en deux groupes de la façon suivante : dans le premier groupe mettons les α_p pour lesquels p appartient à C_1 et les α_{n+q} pour lesquels q n'appartient pas à D_1; dans le deuxième groupe mettons les α_p pour lesquels p appartient à $C_2, \ldots$ et les α_{n+q} pour lesquels q appartient à D_1. Le premier groupe comprend $r_1 + (\lambda - s_1)$ termes et le second en comprend $(n+1-r_1)+s_1$; on a $n+1-r_1+s_1 \leqq n$ et $r_1+\lambda-s_1 \leqq n$, car les $r_i - s_i$ sont tous positifs et $\Sigma(r_i - s_i) = 1+n-\lambda$. On vérifie aussitôt, comme on l'a fait pour $\lambda = 1$, que chacun de ces groupes, arbitrairement complété à n termes, satisfait aux λ involutions.

Si $\lambda > 1$, les $n+\lambda+1$ valeurs exceptionnelles α_p se partagent en deux groupes comprenant chacun n valeurs au plus et tels que les λ relations involutives à n variables dont il est question dans le théorème XII *soient satisfaites lorsqu'on donne à ces variables les valeurs des α_p de l'un quelconque de ces groupes arbitrairement complété.*

En particulier, si $\lambda = n-1$, les $2n$ valeurs exceptionnelles se partagent en deux groupes de n valeurs; chacun de ces groupes satisfait à chacune des $n-1$ relations involutives.

Remarque. — Aussi bien dans le critère fondamental que dans les théorèmes X, XI et XII, certaines valeurs exceptionnelles peuvent être remplacées par un nombre égal d'involutions exceptionnelles (¹).

30. On peut étendre le critère fondamental au cas où les $2n+1$ valeurs exceptionnelles varient avec l'algébroïde considérée. Il suffit pour cela d'appliquer les résultats du n° 19. La normalité pourra encore être affirmée si, $\alpha_{p_0}^{(k)}, \alpha_{p_1}^{(k)}, \ldots, \alpha_{p_n}^{(k)}$ étant $n+1$ quelconques des $2n+1$ valeurs exceptionnelles, l'expression

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_{p_0}^{(k)} & \alpha_{p_0}^{(k)2} & \ldots & \alpha_{p_0}^{(k)n} \\ 1 & \alpha_{p_1}^{(k)} & \alpha_{p_1}^{(k)2} & \ldots & \alpha_{p_1}^{(k)n} \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_{p_n}^{(k)} & \alpha_{p_n}^{(k)2} & \ldots & \alpha_{p_n}^{(k)n} \end{vmatrix}}{\Pi\sqrt{1+|\alpha_{p_i}^{(k)}|^2+|\alpha_{p_i}^{(k)}|^4+\ldots+|\alpha_{p_i}^{(k)}|^{2n}}} = \Pi \frac{\alpha_{p_i}^{(k)} - \alpha_{p_j}^{(k)}}{\sqrt[2n]{1+|\alpha_{p_i}^{(k)}|^2+\ldots+|\alpha_{p_i}^{(k)}|^{2n}}\sqrt[2n]{1+|\alpha_{p_j}^{(k)}|^2+\ldots+|\alpha_{p_j}^{(k)}|^{2n}}}$$

reste, en module, supérieure à une borne positive fixe. Si l'on remarque que la quantité

$$\frac{1+|\alpha|^2+|\alpha|^4+\ldots+|\alpha|^{2n}}{[1+|\alpha|^2]^n}$$

reste comprise entre deux constantes positives lorsque α prend toutes les valeurs possibles, on voit que la condition précédente revient à imposer aux expressions

$$\Pi \frac{|\alpha_{p_i}^{(k)} - \alpha_{p_j}^{(k)}|}{\sqrt{1+|\alpha_{p_i}^{(k)}|^2}\sqrt{1+|\alpha_{p_j}^{(k)}|^2}}$$

de rester supérieures à une borne positive fixe, ou bien encore à imposer une borne positive fixe à la distance sphérique minima des $2n+1$ valeurs exceptionnelles prises deux à deux.

Les algébroïdes à n branches, définies dans un domaine D *et y présentant* $2n+1$ *valeurs exceptionnelles variables avec l'algébroïde considérée mais dont la distance sphérique minima possède une borne inférieure positive, constituent une famille normale.*

On pourrait donner une extension analogue du théorème XII.

(¹) *Voir* P. Montel, *Leçons sur les familles normales....* (*loc. cit.*), p. 289.

Ici, nous prenons le mot « exceptionnel » au sens strict : l'involution exceptionnelle n'est satisfaite en aucun point. Il faut bien se garder de confondre les involutions *exceptionnelles* avec les relations involutives (asymptotiques ou non) *existant* entre les branches.

Extensions des théorèmes de Schottky et Landau.

31. Le théorème VII et le lemme VI conduisent immédiatement à une forme purement qualitative du théorème de Schottky.

THÉORÈME XIII. — *Soit, dans le cercle* $|z|<\mathrm{R}$, *une algébroïde à n branches, y présentant* $2n+1$ *valeurs exceptionnelles* α_p *parmi lesquelles figure la valeur* ∞. *Si, au point* $z=0$, *toutes les branches ont des modules inférieurs à* M_0, *elles ont dans* $|z|<r<\mathrm{R}$ *des modules inférieurs à une borne* M *ne dépendant que de* M_0, *de* $\frac{r}{\mathrm{R}}$ *et des* α_p.

Les considérations développées à la fin de la section précédente montrent que l'on peut donner une borne connaissant seulement M_0, $\frac{r}{\mathrm{R}}$ et un nombre positif inférieur aux distances sphériques des α_p pris deux à deux. De plus, on peut arriver, ici encore, à un énoncé partiellement quantitatif, comme nous allons maintenant le montrer.

Considérons, dans $|z|<\mathrm{R}$, une algébroïde à n branches, présentant $2n+1$ valeurs exceptionnelles dont la distance sphérique minima est supérieure à $\delta>0$. Cette algébroïde appartient à une famille normale. Si

$$f_0 w^n + f_1 w^{n-1} + \ldots + f_n = 0$$

est l'équation qui la définit, on a donc

$$\frac{\Sigma |f_i(0) f_j(0) - f_j(0) f_i'(0)|^2}{(\Sigma |f_i(0)|^2)^2} < \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2},$$

où K est une constante ne dépendant que de δ et de n. Le raisonnement développé au n° 21 peut être repris mot pour mot; il conduit à l'inégalité

$$\log \frac{\sqrt{\Sigma |f_i(re^{i\theta})|^2}}{|f_0(re^{i\theta})|} < \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\left[\mathrm{A}\log\frac{\sqrt{\Sigma |f_i(0)|^2}}{|f_0(0)|} + \mathrm{BK}^2\right],$$

où A et B sont les constantes numériques précédemment estimées. D'autre part, le lemme VI nous apprend que

$$\frac{|f_0(0)|}{\sqrt{\Sigma |f_i(0)|^2}} > \left(\frac{1}{1+\mathrm{M}_0}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{f_0(re^{i\theta})}{\sqrt{\Sigma |f_i(re^{i\theta})|^2}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\mathrm{M}^2}}.$$

Ces trois dernières inégalités conduisent aussitôt à la proposition que nous avions en vue.

Soit, dans le cercle $|z|<\mathrm{R}$, *une algébroïde à n branches, y présentant* $2n+1$ *valeurs exceptionnelles comprenant la valeur* ∞ *et dont la distance sphérique minima est supérieure à* $\delta>0$. *Si au point* $z=0$, *toutes les branches ont des*

modules inférieurs à M_0, *elles ont, dans* $|z|<r<R$, *des modules inférieurs à* M *avec*

$$\log M < \frac{R}{R-r}[An\log(1+M_0)+BK^2]+\frac{1}{2}\log n,$$

où A *et* B *sont des constantes numériques et où* K *ne dépend que de* δ *et de* n.

32. Nous allons maintenant donner des extensions du théorème de Landau. Nous considérerons dans $|z|<R$ des algébroïdes à n branches ayant $2n+1$ valeurs exceptionnelles données ou, plus généralement, $2n+1$ valeurs exceptionnelles dont les distances sphériques sont supérieures à un nombre positif δ donné (¹). Moyennant certaines données complémentaires, on peut déterminer une borne supérieure R_0 du rayon R. On obtiendra différents théorèmes suivant les « données complémentaires » utilisées; mais il faut remarquer que la seule connaissance des dérivées des différentes branches à l'origine ne permet pas de conclure.

Théorème XIV. — *Soit, dans* $|z|<R$, *une algébroïde à n branches ayant* $2n+1$ *valeurs exceptionnelles dont les distances sphériques sont supérieures à* δ *positif. Supposons de plus, qu'au point* $z=0$, *l'une des branches ait une dérivée sphérique* D *et que cette branche soit à une distance sphérique des* $n-1$ *autres supérieure à* δ_0 *positif. Dans ces conditions, on peut déterminer une borne supérieure de* R *en fonction de* n, δ, δ_0 *et* D (²).

Nous allons supposer qu'il n'en est pas ainsi. Il existe alors une suite d'algébroïdes pour lesquelles les conditions précédentes sont réalisées avec $R=1, 2, \ldots, n, \ldots$. Cette famille est normale dans $|z|<1$. On peut donc en extraire une suite partielle uniformément convergente dans $|z|<1$ et qui tend vers une algébroïde limite dans ce cercle. Mais les algébroïdes de la suite sont, à partir d'un certain rang, définies dans le cercle $|z|<n$ et y constituent une famille normale. D'après l'extension aux algébroïdes du théorème de Vitali (³), la suite partielle est uniformément convergente dans $|z|<n$ et l'algébroïde limite existe donc dans ce cercle. Finalement, l'algébroïde limite que nous avons mise en évidence a pour domaine d'existence tout le plan fini.

(¹) On pourrait aussi supposer que certaines valeurs exceptionnelles sont remplacées par des involutions exceptionnelles. Si valeurs et involutions exceptionnelles sont données, les résultats s'énoncent aussitôt; sinon il y a lieu de faire intervenir des bornes inférieures d'expressions semblables à celles considérées dans le n° 19.

(²) Si l'on tient compte de la relation $(2n+1)\delta^2<4$, on voit aussitôt que l'on peut trouver une borne supérieure ne dépendant que de δ, δ_0 et D. On peut faire une remarque analogue pour le théorème XV.

(³) Nous avons établi une telle extension pour les systèmes de $n+1$ fonctions holomorphes (théorème III). Elle s'applique en particulier aux fonctions algébroïdes.

Quitte à faire une nouvelle extraction de suite partielle, on peut toujours supposer que les algébroïdes de la suite jouissent des propriétés suivantes :

a. la branche dont on connaît la dérivée sphérique est convergente au point $z=0$;

b. les $2n+1$ valeurs exceptionnelles convergent vers $2n+1$ valeurs limites α_p (nécessairement distinctes).

D'après la propriété *a*, l'algébroïde limite présente, au point $z=0$, une branche dont la distance sphérique aux autres est supérieure à δ_0. Dans le voisinage de l'origine, cette branche ne se ramifie donc pas et est limite uniforme de branches des algébroïdes de la suite qui ne se ramifient pas non plus. Dans ce voisinage nous sommes ainsi en présence d'une convergence uniforme de fonctions méromorphes, ce qui entraîne la convergence des dérivées sphériques. Par conséquent, l'algébroïde limite présente, au point $z=0$, une branche dont la dérivée sphérique est D; en particulier, cette branche ne peut pas se réduire à une constante.

D'après la propriété *b*, chaque valeur α_p est exceptionnelle pour l'algébroïde limite, à moins qu'une branche de celle-ci ne se réduise à la constante α_p. De sorte que l'algébroïde limite comprend finalement k branches constantes ($0\leq k<n$) et une algébroïde à $n-k$ branches non constantes présentant $2n+1-k\geq 2(n-k)+1$ valeurs exceptionnelles distinctes. Or ceci est en contradiction avec le théorème X; notre démonstration se trouve ainsi achevée.

Remarque. — Le théorème XIV s'exprime par l'inégalité

$$R<R_0(n,\delta,\delta_0,D),$$

où D intervient d'une façon que l'on peut aisément préciser. En effet, changeons z en $\frac{z}{D}$ dans la fonction algébroïde considérée, puis appliquons le théorème; il vient

$$RD<R_0(n,\delta,\delta_0,1).$$

Autrement dit, *le produit* RD *a une borne supérieure ne dépendant que de* n, δ *et* δ_0.

Théorème XV. — *Soit, dans* $|z|<R$, *une algébroïde à* n *branches ayant* $2n+1$ *valeurs exceptionnelles dont les distances sphériques sont supérieures à* δ *positif. Supposons de plus que, dans le cercle* $|z|<r$, *l'oscillation sphérique d'une branche soit supérieure à* δ_1 *positif. Dans ces conditions, on peut déterminer une borne supérieure de* R *en fonction de* n, δ, δ_1 *et* r.

La démonstration étant très voisine de celle du théorème XIV, nous ne la développerons pas. On peut, comme ci-dessus, préciser l'énoncé de la façon suivante : *le quotient* $\frac{R}{r}$ *a une borne supérieure ne dépendant que de* n, δ *et* δ_1 (1).

(1) *Cf.* J. Dufresnoy, *Sur les domaines couverts...* (*loc. cit.*), §§ 45 et 46.

On pourrait obtenir d'autres théorèmes en se fixant d'autres « données complémentaires »; il suffit que celles-ci se conservent dans un passage uniforme à la limite et excluent les algébroïdes dont toutes les branches sont des constantes. Par exemple, on peut imposer aux différentes branches de l'algébroïde d'être, pour $z = 0$, dans un certain domaine du plan complexe, tandis que, pour $z = z_1$, l'une des branches est dans un domaine extérieur au premier.

APPENDICE.

Sur les systèmes de $n+1$ fonctions entières.

33. Nous allons améliorer les résultats exposés dans la première section du Chapitre II en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *S'il n'existe entre les $n+1$ fonctions entières f_i que λ relations linéaires homogènes indépendantes au plus ($\lambda < n$), le nombre de combinaisons linéaires exceptionnelles* (linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$) *que ces fonctions peuvent présenter, est au plus égal à*

$$n + \frac{n}{n-\lambda}.$$

Pour le prouver, il nous suffit de reprendre la démonstration du Chapitre II en faisant une analyse plus soignée. Supposons qu'il y ait $n+1+\mu$ combinaisons exceptionnelles entre les f_i, donc μ combinaisons exceptionnelles proprement dites entre les F_i. Dans chacune de celles-ci, chaque classe, sauf une, donne une combinaison partielle identiquement nulle. De sorte que, s'il y a c classes, le nombre total des combinaisons partielles identiquement nulles est égal à $(c-1)\mu$ et nous avons déjà vu que ces combinaisons sont indépendantes $n+1$ à $n+1$. Le nombre de celles qui portent sur les p fonctions F_i appartenant à une classe ne peut dépasser $p-1$ et le nombre total ne peut dépasser $\Sigma(p_i-1) = n+1-c$. D'où une première relation

$$\mu(c-1) \leq n+1-c.$$

D'autre part, l'existence d'une classe de p fonctions implique l'existence de $p-1$ relations (les fonctions d'une même classe étant proportionnelles). L'existence des c classes entraîne donc ici $\Sigma(p_i-1) = n+1-c$ relations; d'où

$$n+1-c \leq \lambda.$$

Des deux dernières inégalités on déduit aussitôt

$$\mu \leq \frac{n+1-c}{c-1} = \frac{n}{c-1} - 1 \leq \frac{n}{n-\lambda} - 1;$$

ce qui établit le théorème.

Remarque. — Ce théorème s'applique en particulier aux algébroïdes et l'on retrouve ainsi le résultat de M. Ghermanescu (¹).

S'il n'existe entre les n branches d'une algébroïde (définie dans tout le plan fini) *que* λ *relations involutives, le nombre de valeurs exceptionnelles que peut présenter cette algébroïde est au plus égal à*

$$n + \frac{n}{n-\lambda}.$$

Cette remarque permet de montrer que le théorème XVI ne peut plus être amélioré. Soient, en effet, F_0, F_1, ..., $F_{n-\lambda}$ des fonctions dépourvues de zéros et linéairement indépendantes. Considérons alors l'algébroïde à n branches définie par la relation

$$P_0(w)F_0(z) + P_1(w)F_1(z) + \ldots + P_{n-\lambda}(w)F_{n-\lambda}(z) = 0,$$

où les $P_q(w)$ sont des polynomes de degré q. Une valeur $w = w_0$ qui annule $n-\lambda$ des $n-\lambda+1$ coefficients est exceptionnelle pour l'algébroïde.

Or, étant donné ρ valeurs, à quelle condition peut-on les distribuer en $n-\lambda+1$ groupes de sorte que chaque valeur figure dans $n-\lambda$ groupes et que, dans chaque groupe, il y ait au plus n valeurs? Il est évidemment nécessaire que

$$\rho(n-\lambda) \leq n(n-\lambda+1)$$

soit

$$\rho \leq n + \frac{n}{n-\lambda}.$$

Nous allons montrer que cette condition est suffisante. A cet effet, prenons d'abord chacune des ρ valeurs dans chaque groupe, puis retirons la première valeur du premier groupe, la seconde du second, ..., la $n-\lambda+1^{\text{ième}}$ du $n-\lambda+1^{\text{ième}}$, la $n-\lambda+2^{\text{ième}}$ du premier, la $n-\lambda+3^{\text{ième}}$ du second, etc. Cette opération terminée, on aura retiré de certains groupes $\left[\frac{\rho}{n-\lambda+1}\right]$ valeurs et des autres $\left[\frac{\rho}{n-\lambda+1}\right]+1$. De sorte que, finalement, notre distribution satisfera bien aux conditions requises si

$$\rho - \left[\frac{\rho}{n-\lambda+1}\right] \leq n$$

soit

$$\rho \leq n + \frac{n}{n-\lambda}.$$

Supposons donc ρ donné satisfaisant à cette inégalité. Choisissons arbitrairement ρ valeurs distinctes w_i et répartissons-les comme indiqué ci-dessus; puis formons un polynome $P_0(w)$ de degré n ayant comme zéros les valeurs du premier groupe, un polynome $P_1(w)$ de même degré ayant comme zéros les valeurs du deuxième groupe, etc. L'algébroïde

$$P_0(w)F_0(z) + P_1(w)F_1(z) + \ldots + P_{n-\lambda}(w)F_{n-\lambda}(z) = 0$$

(¹) *Cf.* M. Ghermanescu, *Les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières et les fonctions algébroïdes* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 889, 1940). Cet auteur a pressenti le théorème XVI sans parvenir à le démontrer.

a comme valeurs exceptionnelles les ρ valeurs w_i. Or, si nous ordonnons ce polynome en w, il vient

$$w^n f_0(z) + w^{n-1} f_1(z) + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Nous mettons ainsi en évidence $n+1$ fonctions f_q qui ne sont liées que par λ relations linéaires et qui présentent ρ combinaisons linéaires exceptionnelles (linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$), l'entier ρ pouvant être choisi arbitrairement sous la seule condition de ne pas dépasser $n + \frac{n}{n-\lambda}$.

Sur les suites de systèmes de $n+1$ fonctions holomorphes.

34. Le théorème XVI, affirmant l'existence d'un nombre au moins égal à $\frac{\mu n}{1+\mu}$ de relations linéaires homogènes entre les $n+1$ fonctions entières d'un système présentant $n+1+\mu$ combinaisons linéaires exceptionnelles ($0 \leq \mu < n$), améliore le théorème V qui affirmait seulement l'existence de μ relations linéaires entre de telles fonctions. Peut-on améliorer de façon analogue le théorème VI? Il semble que non. La démonstration du théorème XVI ne peut pas s'adapter sans modifications profondes aux suites de systèmes de fonctions holomorphes, car, au lieu du théorème de Borel, nous n'avons plus à notre disposition que celui d'Henri Cartan qui, d'une part, ne fait pas intervenir toutes les fonctions f_i et qui, d'autre part, conduit seulement à affirmer que les quotients des fonctions d'une même classe convergent uniformément vers des fonctions limites (en général non constantes).

Mais supposons, comme l'a fait M. Henri Cartan dans sa Thèse, que toutes les fonctions f_i se répartissent en classes auxquelles le théorème s'applique et tâchons alors d'adapter la démonstration du théorème XVI de la même façon que nous avons fait pour le théorème V dans la deuxième section du Chapitre II.

La suite partielle présente $(c-1)\mu$ expressions de la forme

$$\frac{\beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2}} \qquad (\beta_q = \text{const.})$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants. Et l'on a encore

$$\mu(c-1) \leq n+1-c,$$

d'où

$$c - 1 \leq \frac{n}{1+\mu}.$$

D'autre part, l'existence d'une classe de p fonctions implique l'existence de $p-1$ expressions de la forme

$$\frac{\gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_n f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2}},$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs étant linéairement indépendants relativement à l'ensemble des f_q; mais ici les φ_q sont en général des fonctions et non plus des constantes. Le nombre total Λ des expressions de cette nature, asymptotiquement nulles, est au moins égal à

$$\Sigma(p_i - 1) = n + 1 - c \geq n - \frac{n}{1+\mu} = \frac{n\mu}{1+\mu}.$$

Enfin, si l'on remarque que

$$\mu(c-1) = \mu[n - (n+1-c)] \geq \mu(n-\Lambda),$$

on voit que le nombre λ des expressions à coefficients constants qui sont asymptotiquement nulles satisfait à

$$\lambda \geq \mu(n-\Lambda).$$

Moyennant l'hypothèse de M. Henri Cartan, on parvient donc au théorème suivant :

THÉORÈME XVII. — *Lorsqu'une famille de systèmes de $n+1$ fonctions holomorphes présente $n+1+\mu$ combinaisons linéaires exceptionnelles linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, de toute suite infinie de systèmes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui*

ou bien est uniformément convergente;
ou bien est telle qu'il existe Λ expressions de la forme

$$\frac{\varphi_{p,0} f_0 + \varphi_{p,1} f_1 + \ldots + \varphi_{p,n} f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, \Lambda),$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants relativement à l'ensemble des f_q, et le nombre Λ satisfaisant à

$$\Lambda \geq \frac{n\mu}{1+\mu};$$

de plus, λ des expressions précédentes ont des numérateurs dont les coefficients $\varphi_{p,q}$ se réduisent à des constantes et l'on a

$$\lambda \geq \mu(n-\Lambda).$$

SUR

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ

PAR M. JEAN CHAZY.

Soit l'équation différentielle

$$(1)\quad [ax+by+S_2(x,y)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2[a_1x+b_1y+S_2(x,y)]\frac{dy}{dx}+a_2x+b_2y+S_2(x,y)=0,$$

où a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 désignent six constantes, et où nous représentons, selon une notation générale, par $S_n(x, y)$ une fonction des deux variables x et y holomorphe pour le système de valeurs $x=0$, $y=0$, et dont le développement en série entière en x et y ne comprend pas de terme de degré inférieur à n. Les équations de cette forme, en particulier l'équation des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic, ont été étudiées (1) par Cayley, Darboux, Émile Picard, M. Dulac.

Considérant comme eux les seules valeurs réelles des coefficients et des variables x, y, je veux ici distinguer les différents cas généraux, c'est-à-dire ne comportant pas de condition d'égalité entre les coefficients, que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation (1) au voisinage du point singulier $x=0$, $y=0$, et je donne des exemples de ces différents cas. J'apporte notamment, au moyen d'une forme réduite de l'équation, une démonstration plus simple des résultats établis par Émile Picard, et je montre que deux figures tracées par Darboux et concernant la forme des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic, ont en fait une portée beaucoup plus générale.

Solutions holomorphes. — D'abord l'équation (1) admet en général une ou plusieurs solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x=0$.

(1) CAYLEY, *Philosophical Magazine*, vol. 26, 1863, p. 441-452; DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, 1896, p. 448-465; ÉMILE PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 3, 1908, p. 223-234; DULAC, *Comptes rendus*, t. 132, 1901, p. 1169. *Voir* aussi *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, article de P. PAINLEVÉ, t. II, vol. 3, fasc., 1, p. 18.

En effet cherchons les courbes intégrales qui aboutissent au point $x = 0$, $y = 0$, soit O, et qui ont en O une tangente; le coefficient angulaire t d'une telle tangente est la limite à la fois du quotient $\frac{y}{x}$ et de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ quand x et y tendent vers zéro, et par suite satisfait à l'équation algébrique du troisième degré

$$(a + bt)t^2 + 2(a_1 + b_1 t)t + a_2 + b_2 t = 0. \tag{2}$$

L'équation (2) dans le domaine réel a une ou trois racines; par une rotation des axes de coordonnées annulons cette racine ou l'une de ces trois racines, de sorte que l'équation différentielle conserve la forme (1), mais le coefficient de x, a_2, y est nul. Si nous faisons alors le changement de variable $y = tx$, nous obtenons entre les variables x et t l'équation transformée

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{-a_1 - b_1 t + x\mathrm{S}(x,t) \pm \sqrt{(a_1 + b_1 t)^2 - (a + bt)b_2 t + x\mathrm{S}(x,t)}}{a + bt + x\mathrm{S}(x,t)} - t,$$

où nous représentons encore d'une façon générale par $\mathrm{S}(x, t)$ une fonction des deux variables x et t holomorphe pour le système de valeurs $x = 0$, $t = 0$. Le dernier numérateur a pour ce système de valeurs deux déterminations, l'une égale à $-2a_1$, l'autre nulle : si le coefficient a_1 est différent de zéro, l'équation correspondant à la première détermination n'a pas d'autre solution, où x et t tendent à la fois vers zéro, que la solution $x = 0$.

L'équation correspondant à la seconde détermination se réduit à

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{-a_1 - b_1 t + (a_1 + b_1 t)\left[1 - \frac{(a + bt)b_2 t}{2(a_1 + b_1 t)^2}\right] + \dots}{a + bt} - t = -\left(\frac{b_2}{2a_1} + 1\right)t + \dots,$$

si nous n'écrivons pas d'une part le produit de la variable x par une fonction de x et t holomorphe pour les valeurs $x = 0$, $t = 0$, et d'autre part le produit du carré t^2 par une fonction de t holomorphe pour $t = 0$. Par conséquent, pourvu que la quantité $\frac{b_2}{2a_1} + 1$ ne soit pas un nombre entier négatif, l'équation obtenue admet, selon le résultat classique de Briot et Bouquet, une solution $t(x)$ holomorphe et nulle pour $x = 0$, et par suite l'équation (1) admet une solution $y(x)$ holomorphe pour $x = 0$ et correspondant à une courbe intégrale tangente en O à l'axe Ox. Il résulte que *l'équation différentielle* (1) *admet en général une ou ou trois solutions holomorphes et nulles pour* $x = 0$.

Simplification de l'équation. — Complétant le calcul qui précède, nous étudierons bientôt les solutions de l'équation (1) voisines de la solution holomorphe $y(x)$, c'est-à-dire les courbes intégrales tangentes au point singulier O à la courbe représentant cette solution holomorphe. En vue d'une telle étude,

servons-nous de l'existence de la solution $y(x)$ pour simplifier l'équation : si nous faisons le changement de variable défini par la notation

$$[x, y(x) + y],$$

l'équation transformée est encore de la forme (1), mais admet la solution particulière $y = 0$. Ou encore nous pouvons supposer inversement que *l'équation* (1) *admet la solution* $x = 0$, c'est-à-dire que *la courbe* $x = 0$ *est une courbe intégrale*.

Ainsi dans l'équation (1) le facteur du carré $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ doit être le produit de la variable x et d'une fonction de x et y holomorphe, et d'ailleurs différente de zéro, pour $x = 0$, $y = 0$, fonction qui, par une division, peut être réduite à l'unité. Le coefficient important est alors, dans le facteur de $\frac{dy}{dx}$, le coefficient de y, que nous désignerons par α. En ajoutant à la variable y un terme linéaire en x convenable, nous pouvons encore dans le même facteur, pourvu que α soit différent de -1, annuler le terme du premier degré en x. Par suite, changeant la notation des termes du premier degré, nous considérerons désormais l'équation

$$(3) \qquad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2[\alpha y + S_2(x, y)]\frac{dy}{dx} + \beta x + \gamma y + S_2(x, y) = 0$$

ou

$$(4) \qquad x\frac{dy}{dx} = -\alpha y - S_2(x, y) \pm \sqrt{[\alpha y + S_2(x, y)]^2 - x[\beta x + \gamma y + S_2(x, y)]}.$$

Malgré cette transformation, et pour simplifier les figures, nous tracerons systématiquement les courbes intégrales en y considérant les variables transformées x et y comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires dans le plan xOy. Ainsi la solution particulière $x = 0$ est représentée par l'axe Oy.

Solutions voisines des solutions holomorphes. — Étudions les solutions de l'équation (3) correspondant à des courbes intégrales tangentes en O à l'axe Oy. Introduisons comme variable, au lieu du quotient $\frac{y}{x}$, qui est très grand dans les solutions considérées, l'inverse $\frac{x}{y}$: posons $x = uy$, et étudions, quand u tend vers zéro, les solutions $y(u)$ de l'équation transformée de l'équation (4) entre les variables u et y. Il suffira d'ailleurs de supposer les variables x, y, u positives; les résultats obtenus dans le premier quadrant du plan xOy s'étendent immédiatement aux trois autres quadrants.

Par un calcul analogue au calcul antérieur, nous obtenons d'abord

$$y\frac{du}{dy} = \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \frac{-\alpha y - S_2(x, y) \pm \sqrt{[\alpha y + S_2(x, y)]^2 - x[\beta x + \gamma y + S_2(x, y)]}}{\beta x + \gamma y + S_2(x, y)} - u.$$

Si l'on prend la détermination du numérateur qui s'annule avec x, la dernière fraction peut s'écrire successivement

$$\frac{\alpha y + S_2(x,y)}{\beta x + \gamma y + S_2(x,y)}\left[-1+\sqrt{1-\frac{x[\beta x+\gamma y+S_2(x,y)]}{[\alpha y+S_2(x,y)]^2}}\right] = -\frac{x}{2[\alpha y+S_2(x,y)]}+\dots$$

Au total nous pouvons mettre l'équation entre les deux variables u et y sous la forme

$$u\frac{dy}{du} = y[n-1+S_1(u,y)], \tag{5}$$

en introduisant la quantité [1]

$$n = \frac{1}{2\alpha+1},$$

qui sera commode dans des formules ultérieures, et en désignant selon la notation définie plus haut par $S_1(u,y)$ une fonction des deux variables u et y holomorphe et nulle pour le système de valeurs $u=0$, $y=0$.

L'équation (5) admet bien entendu les deux solutions $u=0$, $y=0$, et, pour étudier les autres solutions $y(u)$ quand la variable u tend vers zéro, nous sommes conduits à distinguer plusieurs cas suivant la valeur du coefficient $n-1$.

Faisceau de courbes intégrales tangentes : disposition I. — Considérons d'abord le premier cas où *le coefficient* $n-1$ *est positif*, c'est-à-dire où le coefficient α de l'équation (3) est compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro. Dans ce cas le point $u=0$, $y=0$ du plan où l'on représente les deux variables u et y, est un *nœud* de l'équation (5) : cette équation admet une infinité de solutions $y(u)$ dépendant d'une constante arbitraire, nulles avec u, d'ordre $n-1$ en u, et qu'on peut représenter par un développement de la forme [2]

$$y = Cu^{n-1}S(u, Cu^{n-1}),$$

où C désigne une constante arbitraire positive, et S, rappelons-le, une fonction des deux variables u et Cu^{n-1} holomorphe pour le système des valeurs nulles de ces deux variables. A ces solutions correspondent une infinité de solutions $y(x)$ de l'équation (3), et de courbes intégrales de cette équation tangentes en O à l'axe Oy, et sur lesquelles

$$x = uy = Cu^n S(u, Cu^{n-1})$$

est d'ordre n en u; par élimination de la variable u, y est en x d'ordre $\frac{n-1}{n} = -2\alpha$.

---

[1] La quantité n est identique au coefficient A considéré par Darboux (*loc. cit.*, p. 454).

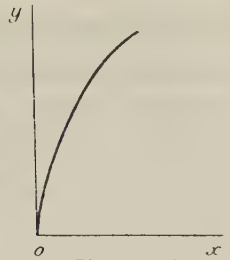
[2] On sait que cette représentation peut être en défaut quand le coefficient positif $n-1$ est un nombre entier ou l'inverse d'un nombre entier, mais nous écartons ici les cas d'exception, car ils comportent des conditions d'égalité entre les coefficients de l'équation différentielle.

Ainsi, dans le cas considéré, sur la figure schématique comme avec la signification réelle des variables x et y, *les courbes intégrales* de l'équation (3) le long desquelles le quotient $\frac{x}{y}$ tend vers zéro, *forment* de la façon la plus simple *un faisceau tangent au point* O *à la courbe intégrale particulière* Oy ou $x = 0$ (*fig.* 1). *Ce premier cas, et* cette disposition de figure que nous appellerons *la disposition* T, *sont caractérisés par l'une des deux conditions*

$$\frac{1}{2} < \alpha < 0, \qquad n > 1.$$

Si au contraire *le coefficient* $n - 1$ *de l'équation* (5) *est négatif*, le point $u = 0$, $y = 0$ est, dans le plan où l'on représente les deux variables u et y, non plus un nœud, mais un *col* de cette équation. Dans ce cas nous pouvons énoncer des résultats en quelque sorte complémentaires de ceux qui précèdent, concernant

Fig. 1.



Disposition T

l'existence des solutions $y(u)$ de l'équation (5) et l'allure des solutions $y(x)$ correspondantes.

En effet, quand le point $u = 0$, $y = 0$ est un col de l'équation (5), cette équation n'admet pas d'autre solution où les variables u et y tendent simultanément vers zéro que les deux solutions particulières $u = 0$, $y = 0$. Toute courbe intégrale représentant une autre solution $y(u)$ et passant au voisinage du col considéré, a, par rapport aux deux courbes représentant ces deux solutions particulières, une allure analogue à l'allure d'une branche d'hyperbole par rapport à ses deux asymptotes. D'une façon plus précise, on peut définir (1) les solutions $y(u)$ au voisinage du col, et dans un angle où le quotient $\frac{y}{u}$ est compris entre deux quantités positives fixes, en égalant à une constante une intégrale de l'équation (5) équivalente au produit yu^{1-n}, où l'exposant $1 - n$ est positif. Substituant l'expression $u = \frac{x}{y}$, on voit que dans le plan xOy les

(1) *Voir* notamment *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. 3, fasc. 1, article de P. PAINLEVÉ, p. 61.

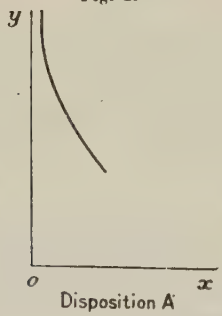
courbes représentant les solutions correspondantes de l'équation (2) ont deux allures différentes selon que le coefficient n de l'équation (5), déjà supposé inférieur à 1, est positif ou négatif.

Courbes intégrales d'allure asymptotique : disposition A. — Considérons le deuxième cas où *le coefficient n est positif*, donc compris entre zéro et 1, où, par suite, le coefficient α de l'équation (3) est positif aussi. Dans ce cas les solutions $y(x)$ de l'équation (3) ont une allure analogue à l'allure que nous venons de mettre en évidence des solutions $y(u)$ dans le plan correspondant. Au voisinage du point singulier $x = 0$, $y = 0$, et dans une région où le quotient $\frac{y^2}{x}$ est compris entre deux quantités positives fixes, les solutions $y(x)$ peuvent être définies par une intégrale de l'équation (3) équivalente au produit $x^{1-n}y^n$, où les deux exposants $1 - n$ et n sont positifs : de sorte que y est en x de l'ordre négatif $-\frac{1-n}{n} = -2\alpha$.

Ainsi, dans ce deuxième cas, et *dans un certain voisinage du point singulier* O, *les courbes intégrales* de l'équation (3) sur lesquelles le quotient $\frac{x}{y}$ tend vers zéro, *ont l'allure de courbes asymptotes à la courbe intégrale particulière* Oy (*fig.* 2). *Le deuxième cas, et* la disposition de figure obtenue, que nous appellerons *la disposition* A, *sont caractérisés par l'une des deux conditions*

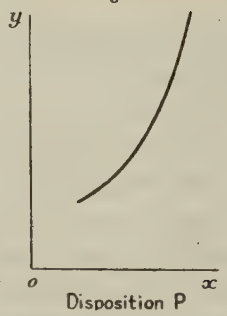
$$\alpha > 0, \qquad 0 < n < 1.$$

Fig. 2.



Disposition A

Fig. 3.



Disposition P

Courbes intégrales d'allure parabolique : disposition P. — Considérons enfin le troisième cas où *le coefficient n* de l'équation (5) *est négatif*, où, par suite, le coefficient α de l'équation (3) est inférieur à $-\frac{1}{2}$. Comme dans le cas précédent, les solutions $y(u)$ de l'équation (5) peuvent être définies par une intégrale équivalente au produit yu^{1-n}, au voisinage du point $u = 0$, $y = 0$, et dans un angle où le quotient $\frac{y}{u}$ est compris entre deux quantités positives fixes. Par suite, par substitution de l'expression de u, les solutions $y(x)$ de l'équation (3)

peuvent être définies, au voisinage du point singulier $x = 0, y = 0$ et dans une région où le quotient $\frac{y^2}{x}$ est compris entre deux quantités positives fixes, par une intégrale équivalente au quotient $\frac{x^{1-n}}{y^{-n}}$, où les deux exposants $1 - n$ et $-n$ sont positifs : de sorte que, comme dans la disposition T, y est en x de l'ordre positif $\frac{1-n}{-n} = -2\alpha$.

Donc, dans ce troisième cas, et *dans un certain voisinage du point singulier* O, *les courbes intégrales* sur lesquelles le quotient $\frac{x}{y}$ tend vers zéro et autres que l'axe Oy, *ont l'allure de branches paraboliques admettant pour direction asymptotique la direction* Oy (*fig.* 3). *Le troisième cas*, *et* la disposition de figure correspondante, que nous appellerons *la disposition* P, *sont caractérisés par l'une des deux inégalités*

$$\alpha < -\frac{1}{2}, \qquad n < 0.$$

Courbes d'allure asymptotique ou parabolique au voisinage du point singulier. — Insistons sur la signification des résultats énoncés dans les dispositions de figures A et P. S'il s'agissait de courbes asymptotes à l'axe Oy ou de branches paraboliques de direction asymptotique Oy au sens ordinaire des deux mots, il y aurait évidemment contradiction, puisque d'autre part les courbes obtenues doivent être situées dans une région où le quotient $\frac{y^2}{x}$ est compris entre deux quantités fixes : mais ces courbes ne sont pas des courbes infinies, et donnent une représentation valable seulement au voisinage du point singulier O.

Il est facile d'indiquer un exemple analogue tiré de l'étude des courbes tracées sur une surface au voisinage d'un point. Soient sur un tore un point à courbures opposées M, et la section découpée par un plan parallèle au plan tangent en M et voisin de ce plan tangent : cette section se compose, au voisinage du point M, de deux branches de courbes asymptotes aux deux droites projections des directions asymptotiques du tore en M, c'est-à-dire de deux branches de courbes de même allure au voisinage du point M que les deux branches de l'une des deux hyperboles constituant l'indicatrice des courbures en M; mais nécessairement ces deux branches de section sont, comme la surface du tore, tout entières à distance finie.

Ajoutons que, quand l'équation du troisième degré (2) a ses trois racines réelles, l'étude précédente s'applique successivement aux solutions voisines des trois solutions holomorphes de l'équation (1), et aux solutions complémentaires représentées par des courbes d'allure asymptotique ou parabolique au voisinage du point O; cette étude entraîne alors pour l'équation (3), dans chacun des quatre quadrants, les conséquences suivantes. Soit Oy_1 la tangente à la courbe représentant l'une des deux solutions holomorphes autres que la solution $x = 0$; il existe, soit un faisceau de courbes intégrales tangentes en O

à Oy_1, soit des courbes intégrales asymptotes dans un certain voisinage du point O à la droite Oy_1, soit des courbes intégrales d'allure parabolique dans un certain voisinage du point O et admettant pour direction asymptotique la droite Oy_1. Nous désignerons encore les trois dispositions de figure correspondantes par *disposition* T, *disposition* A, *disposition* P.

Équation réduite. — Il est à prévoir d'après les résultats qui précèdent, et toute la suite va confirmer cette prévision, que l'allure des courbes intégrales des équations (1) et (3) au voisinage de l'origine O dépend seulement en première approximation des termes du premier degré en x et y, c'est-à-dire dans l'équation (3) des trois coefficients α, β, γ. Ou encore on met cette allure en évidence, du moins en valeur principale selon le mot de Darboux, en réduisant les deux équations aux termes du premier degré en x et y, c'est-à-dire l'équation (3) à l'équation

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\alpha y\frac{dy}{dx} + \beta x + \gamma y = 0 \quad (6)$$

une telle réduction revient évidemment à remplacer dans l'équation (1) ou (3) x et y par εx et εy, ε désignant un paramètre arbitraire, à diviser par ε et à faire ensuite $\varepsilon = 0$ dans l'équation obtenue. On peut justifier encore autrement la représentation ainsi réduite des courbes intégrales au voisinage du point O : comme nous l'avons indiqué sur un exemple, cette représentation est analogue à la représentation qu'en un point d'une surface l'indicatrice des courbures donne de la section de cette surface par un plan parallèle au plan tangent et voisin.

Il suffira par conséquent, pour obtenir les différents cas que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation (3) au voisinage du point O, de prendre comme exemples des équations de la forme (6). Il résulte de la formation de l'équation (6) que celle-ci est une équation homogène du premier ordre entre les variables x et y. D'ailleurs, résolue par rapport à y, cette équation exprime y par le produit de la variable x et d'une fonction de la dérivée $\frac{dy}{dx} = y'$, soit

$$y = -x\frac{y'^2 + \beta}{2\alpha y' + \gamma};$$

donc l'équation (6) est aussi une équation de Lagrange homogène. Ainsi nous possédons deux méthodes simples pour ramener l'intégration de l'équation (6) à une quadrature.

On peut remarquer, dans le cas où l'équation (3) se réduit à l'équation homogène (6), que la restriction concernant sur les courbes intégrales d'allure asymptotique ou parabolique le quotient $\frac{y}{x}$ ou $\frac{y^2}{x}$ tombe : en effet l'équation

transformée (5), où par homogénéité la fonction $S_1(u, y)$ ne dépend que de la variable u, devient

$$\frac{dy}{y} = (n-1)\frac{du}{u} + \frac{S_1(u)}{u}du,$$

et par intégration

$$\log y = \log u^{n-1} + S_1(u) + \log C \qquad \text{et} \qquad yu^{1-n} = Ce^{S_1(u)},$$

la nouvelle expression $S_1(u)$ désignant comme toujours une fonction de u holomorphe et nulle pour $u = 0$, et C désignant une constante positive arbitraire; donc l'équation (5) admet une intégrale équivalente au produit yu^{1-n} quand u tend vers zéro, mais ceci dans une direction quelconque autour du point $u = 0$, $y = 0$. D'ailleurs les courbes intégrales représentant les solutions $y(x)$ sont homothétiques par rapport à l'origine O, et l'allure de l'une d'elles au voisinage du point O est identique à l'allure d'une autre à l'infini.

Les discriminants δ *et* Δ. — Nous serons amenés pour diriger la discussion, à considérer les signes des discriminants de deux trinomes du second degré, dont les coefficients sont formés avec les coefficients α, β, γ des termes linéaires de l'équation (3), coefficients qui figurent déjà dans l'équation réduite (6).

D'une part considérons dans le plan xOy le lieu des points x, y auxquels l'équation différentielle (3) fait correspondre deux valeurs confondues de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire annulons le discriminant du trinome (3), qui figure multiplié par $-\frac{1}{4}$ sous le radical de l'équation (4) : nous obtenons une courbe, soit K, ayant à l'origine un point isolé ou un point double à tangentes distinctes, d'équation

$$x(\beta x + \gamma y) - \alpha^2 y^2 = 0,$$

selon que le discriminant

$$\delta = -4\alpha^2\beta - \gamma^2$$

est positif ou négatif. Dans le premier cas, $\delta > 0$, deux courbes intégrales passent en un point quelconque au voisinage du point O, sauf peut être en O lui-même, et ces courbes n'ont pas d'autre point singulier que le point O. Dans le second cas, $\delta < 0$, la courbe K divise le voisinage du point O en quatre angles : les courbes intégrales existent seulement dans deux de ces quatre angles, opposés par le sommet, et, selon une proposition classique, les deux branches de la courbe K sont en général des lieux de points de rebroussement de ces courbes intégrales.

D'autre part l'équation aux coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales aboutissant à l'origine, qui était l'équation du troisième degré (2) pour l'équation différentielle (1), s'abaisse au deuxième degré avec les notations

de l'équation (3), devient

$$t^2 + 2\alpha t^2 + \beta + \gamma t = 0, \tag{7}$$

et a pour discriminant

$$\Delta = 4(2\alpha + 1)\beta - \gamma^2.$$

Selon que le discriminant Δ est positif ou négatif, les courbes intégrales aboutissant au point O avec une tangente déterminée sont ainsi : l'axe Oy et éventuellement un faisceau de courbes tangentes; ou l'axe Oy et deux courbes représentant les deux autres solutions holomorphes, et éventuellement un, deux ou trois faisceaux de courbes tangentes à ces trois premières (¹).

Entre les discriminants δ et Δ, tous deux linéaires en β et γ^2, il y a des relations simples, notamment la relation

$$(2\alpha + 1)\delta - \alpha^2\Delta + (\alpha + 1)^2\gamma^2 = 0. \tag{8}$$

d'où résulte que l'une au moins des deux quantités $(2\alpha + 1)\delta$ et Δ est négative.

Plus loin nous supposerons successivement le premier discriminant δ positif, puis négatif, et aussi le second discriminant Δ positif, puis négatif, ce qui nous donnera quatre cas à distinguer.

Résultats démontrés par Émile Picard. — Ayant obtenu antérieurement les courbes intégrales de l'équation (3) qui aboutissent au point singulier O avec une tangente, nous allons démontrer qu'il n'existe pas d'autres courbes intégrales de la même équation qui tendent vers le point O ou qui s'approchent arbitrairement du point O : la proposition a été démontrée par Émile Picard à partir de l'équation (1); nous donnons ici à partir de l'équation (3) une démonstration plus simple.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas que nous avons défini, où le discriminant δ est positif. Et considérons une courbe intégrale de l'équation (3), autre que l'axe Ox, soit la courbe C; suivons cette courbe dans un certain sens où elle ne quitte pas le voisinage du point O, et étudions d'abord la variation de l'abscisse x. En écrivant l'équation (3) sous la forme

$$x = [\alpha y + S_2(x, y)]\frac{dx}{dy} + [\beta x + \gamma y + S_2(x, y)]\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0, \tag{9}$$

nous remarquons que la dérivée $\frac{dx}{dy}$ ne peut s'annuler sur la courbe C que si la variable x s'annule aussi, c'est-à-dire en un point de l'axe Oy. D'ailleurs en un tel point l'équation (9) donne deux valeurs de la dérivée $\frac{dx}{dy}$, dont l'une est nulle et détermine comme courbe intégrale l'axe Oy lui-même, et dont l'autre

(¹) Nous verrons qu'en fait il peut exister, non pas trois, mais au plus deux de ces faisceaux.

est différente de zéro, sauf peut-être si y est nul aussi. Donc le long de la courbe C la dérivée $\frac{dx}{dy}$ ne peut s'annuler, sur la figure schématique *la tangente ne peut être parallèle à* Oy *: sauf peut-être au point* O, comme il arrive évidemment dans la disposition de figure T pour les courbes du faisceau tangent en O à l'axe Oy. Il résulte que sur une courbe intégrale suivie dans un sens constant *l'abscisse* x *varie dans un sens constant*, au moins jusqu'au point O; cette courbe ne peut couper plus d'une fois l'axe Oy, ni non plus les deux courbes représentant éventuellement les deux autres solutions holomorphes. Notamment une courbe intégrale ne peut former un cycle du point O, ni s'enrouler autour de O en forme de spirale.

Supposant encore le discriminant δ positif, étudions le long de la courbe C la variation de la direction du rayon vecteur issu du point O. Si nous introduisons les variables arc tang $\frac{y}{x}$ et $t = \frac{y}{x}$, les dérivées de ces variables par rapport à l'abscisse x sont données par les équations.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+t^2}\,\frac{dt}{dx},$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{-\alpha y - S_2(x,y) \pm \sqrt{[\alpha y + S_2(x,y)]^2 - x[\beta x + \gamma y + S_2(x,y)]}}{x} - \frac{y}{x};$$

d'où nous tirons en fonction de t et de x une expression de la forme

$$x\frac{dt}{dx} = -\alpha t + xS(x\,|\,t) \pm \sqrt{\alpha^2 t^2 - \beta - \gamma t + xS(x\,|\,t)} - t,$$

si nous désignons d'une façon générale par $S(x\,|\,t)$ une fonction de x holomorphe pour $x = 0$, et dont les coefficients du développement en série entière en x dépendent de la variable t. D'où encore

$$x\frac{dt}{dx} = f(t) + xS(x\,|\,t), \tag{10}$$

si nous posons

$$f(t) = (\alpha+1)t \pm \sqrt{\alpha^2 t^2 - \beta - \gamma t};$$

il est à remarquer, et il est d'ailleurs facile de prévoir, que l'équation

$$f(t) = 0$$

est équivalente à l'équation (7)

$$(2\alpha+1)t^2 + \gamma t + \beta = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation du second degré qui donne les coefficients des tangentes aux courbes intégrales aboutissant à l'origine O.

Il résulte de l'expression (10) que, quand la variable x est petite, la dérivée $\frac{dt}{dx}$ ne peut s'annuler que si la fonction algébrique $f(t)$ est petite aussi.

Quand le discriminant Δ est positif, $f(t)$ ne peut pas s'annuler ni devenir arbitrairement petit. Donc, si le voisinage considéré du point O est assez petit, la dérivée $\frac{dt}{dx}$ a un signe constant le long de la courbe C, la fonction arc tang$\frac{y}{x}$ varie dans un sens constant, et, puisque cette fonction est bornée selon le résultat qui vient d'être énoncé, elle tend vers une limite finie quand x tend lui-même vers une limite finie, et par suite y tend aussi vers une limite finie. Si le point limite ainsi obtenu dans le plan xOy n'est pas le point singulier O, la courbe C peut être prolongée au delà, à moins qu'elle ne sorte du voisinage défini du point O. Si le point limite est le point O, la courbe C y aboutit avec une tangente, nécessairement située sur l'axe Oy, et appartient nécessairement au faisceau obtenu antérieurement dans la disposition de figure T.

Quand le discriminant Δ est négatif, la dérivée $\frac{dt}{dx}$ ne peut s'annuler sur la courbe C que si t est voisin de l'une, soit t_1, des deux racines de l'équation (7). Or, pour étudier les courbes intégrales de l'équation (3) sur lesquelles, au voisinage du point O, le quotient $\frac{y}{x}$ est voisin de la racine t_1, et parmi lesquelles figure la courbe C_1 représentant la solution holomorphe correspondante, on peut opérer le changement de variable qui transforme la courbe C_1 en l'axe Oy et l'équation (3) en une nouvelle équation de même forme. Il résulte alors de l'étude antérieure que les courbes intégrales de cette nouvelle équation sur lesquelles le nouveau quotient $\frac{y}{x}$, qui est équivalent à l'ancien quand x et y tendent vers zéro, est très grand, présentent l'une des trois dispositions de figure T, A, P définies plus haut. Par suite, ou bien la courbe C considérée quitte le voisinage du point singulier O, ou bien elle coïncide avec la courbe C_1, ou bien, dans la disposition de figure T, la courbe C aboutit au point O tangentiellement à la courbe C_1.

Considérons enfin le second cas où le discriminant Δ est négatif, et où au voisinage du point O les courbes intégrales de l'équation (3) ont des points de rebroussement sur les branches de la courbe K, et suivons de même une courbe intégrale C dans un sens constant. Selon la proposition classique, sur les deux arcs de la courbe C issus de l'un de ces points de rebroussement, les signes à prendre devant le radical de l'équation (4) sont opposés. Il résulte que ces deux arcs ne peuvent couper tous deux l'axe Oy : car en l'un des points d'intersection le signe du radical serait tel que l'expression (4) du produit $x\frac{dy}{dx}$ ne s'annulerait pas avec x, et par suite en ce point la courbe intégrale correspondante serait l'axe Oy, et non la courbe C. Par suite, dans ce second cas, les variations de l'abscisse x et de la direction du rayon vecteur peuvent changer de sens, mais une fois seulement, et, à ce changement près, les résultats précédents subsistent.

En définitive, si l'on suit *une courbe intégrale de l'équation* (3) dans un certain sens, et en passant éventuellement par un point de rebroussement, ou bien cette courbe quitte le voisinage du point O, ou bien elle *aboutit au point* O *avec une tangente, qui est l'axe* Oy *ou qui a pour coefficient angulaire l'une des deux racines de l'équation* (7). Ainsi *il n'y a pas d'autre courbe intégrale de l'équation* (3) *tendant vers le point* O *ou s'approchant arbitrairement du point* O *que l'axe* Oy *et éventuellement un faisceau de courbes tangentes, et en outre pour* $\Delta < 0$, *les deux courbes représentant les deux autres solutions holomorphes, et éventuellement un ou deux faisceaux de courbes tangentes à ces deux-là.*

δ *positif.* — Dans l'étude des courbes intégrales de l'équation (3) au voisinage du point O, nous allons supposer en premier lieu que la courbe K, dont l'équation est formée en annulant le discriminant du trinome du second degré (3) en $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire en annulant l'expression figurant sous le radical de l'équation (4), présente à l'origine O un point isolé. Il résulte que les courbes intégrales étudiées n'ont pas de points de rebroussement au voisinage du point O, et il résulte aussi que, dans ce voisinage, l'équation (4) se décompose en deux équations distinctes, dont les courbes intégrales peuvent être tracées séparément, sans passage de l'une à l'autre équation si le point x, y dans le plan xOy ne s'éloigne pas du point O. Nous aurons ainsi, dans un premier cas, selon la notation antérieure,

$$\delta = \ldots 4\alpha^2\beta \quad \gamma^2 > 0,$$

ce qui entraîne nécessairement que le coefficient β est négatif. δ étant positif, nous supposerons successivement le discriminant Δ positif, puis négatif.

Lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic. — Indiquons de suite que l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic rentre précisément dans le premier cas ainsi défini.

En effet, si dans l'espace on prend l'ombilic considéré pour origine de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z, et le plan tangent correspondant pour plan xOy, l'équation de la surface, soit S, au voisinage de cet ombilic est de la forme

$$(11) \qquad z = k(x^2+y^2) + hx^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + cy^3 + S_3(x, y),$$

k, h, a, b, c sont cinq constantes, et $S_3(x, y)$, suivant la notation définie plus haut, désigne une fonction de x et y holomorphe pour le système de valeurs $x = 0$, $y = 0$, et dont le développement en série entière en x et y ne comprend pas de terme de degré inférieur à 3. Il résulte que l'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan tangent xOy est au

voisinage de l'ombilic O de la forme

$$(12)\quad [ax+by+S_2(x,y)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(h-b)x+(a-c)y+S_2(x,y)]\frac{dy}{dx} - ax - by + S_2(x,y) = 0,$$

c'est-à-dire de la forme (1). En outre, si l'on considère le discriminant du trinome en $\frac{dy}{dx}$ formé par le premier membre, le développement de ce discriminant en série entière en x et y commence par un terme de degré 2 qui est la somme de deux carrés précédés du signe — :

$$4(ax+by)^2 - [(h-b)x+(a-c)y]^2;$$

donc la courbe K correspondante admet en général l'ombilic O comme point double isolé, selon le cas qui vient d'être défini.

Il est possible évidemment de simplifier le développement (11) de la cote z par une rotation des axes Ox et Oy, notamment d'annuler dans ce développement le coefficient a ou b, mais on peut faire la remarque suivante en appliquant à l'équation (12) les résultats antérieurs. D'après ces résultats, en un ombilic d'une surface passent en général une ou trois lignes de courbure définies par des relations holomorphes entre les coordonnées x et y, et dont les coefficients angulaires sont donnés par une équation algébrique du troisième degré, soit

$$(a+bt)t^2+[h-b+(a-c)t]t-a-bt=0.$$

Par suite, si, par une rotation des axes autour de l'ombilic O, l'axe Oy est rendu tangent à cette ligne, ou à l'une de ces trois lignes de courbure, l'équation du troisième degré correspondante admet la racine $t=\infty$, c'est-à-dire que le coefficient b est nul, et réciproquement. D'où une relation simple : si l'axe Oy est tangent à une ligne de courbure aboutissant à l'ombilic O, l'équation (11) de la surface S ne comporte pas de terme en xy^2, et réciproquement.

Si notamment la surface S est symétrique par rapport au plan zOy, la relation précédente se trouve vérifiée : d'une part la section correspondante est une ligne de courbure de la surface, et d'autre part le développement de la cote z en série entière en x et y comprend seulement des puissances paires de x. Dans ce cas l'équation réduite de l'équation (12), où b et h sont nuls, est l'équation

$$xy'^2+\left(1-\frac{c}{a}\right)yy'-x=0.$$

c'est-à-dire correspond dans l'équation (6) aux valeurs des coefficients $\beta=-1$, $\gamma=0$, $2\alpha=1-\frac{c}{a}$. Nous prendrons comme exemples plusieurs équations de la dernière forme obtenue.

δ positif, Δ positif. — Le discriminant δ étant supposé positif, considérons d'abord le premier cas où le discriminant

$$\Delta = 4(2\alpha+1)\beta - \gamma^2$$

est positif aussi : dans ce cas il ne peut exister pour les courbes intégrales de l'équation (3) de direction de tangente en O ni de direction asymptotique au voisinage du point O autre que la direction Oy. En outre, il résulte des deux inégalités $\delta > 0$, $\Delta > 0$ et de la relation (8)

$$(2\alpha+1)\delta + \alpha^2\Delta + (\alpha+1)^2\gamma^2 = 0$$

que la quantité $2\alpha+1$ est nécessairement négative : donc les courbes intégrales de l'équation (3) ont la disposition P définie dans l'étude antérieure, c'est-à-dire ont, dans un certain voisinage du point O, l'allure de branches paraboliques admettant la direction asymptotique Oy.

Lignes de courbure d'une surface du deuxième degré au voisinage d'un ombilic. — Nous pouvons prendre comme exemple les projections sur le plan tangent xOy des lignes de courbure d'une surface S admettant le point O comme ombilic, quand la surface S *est une surface du deuxième degré*.

En effet les droites isotropes du plan tangent xOy, définies dans ce plan par l'équation

$$x^2 + y^2 = 0,$$

doivent être situées sur la surface; par conséquent dans le développement (11) de la cote z les polynomes homogènes des degrés successifs doivent être tous divisibles par le facteur x^2+y^2. Si la surface du deuxième degré admet comme plan de symétrie le plan zOy, dans le polynome de degré 3 les coefficients b et b sont nuls, et l'on a, d'après la condition précédente, $c = 3a$: ce polynome se réduit à $3a\,y(x^2+y^2)$. Par suite l'équation réduite correspond à la valeur $2\alpha = 1 - \frac{c}{a} = -2$, soit

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0, \tag{13}$$

aux valeurs $\delta = 4$, $\Delta = 4$, toutes deux positives, des deux discriminants, et enfin à l'ordre $-2\alpha = 2$ de y en x sur les branches paraboliques des courbes intégrales.

Effectivement l'équation (13) admet la solution générale

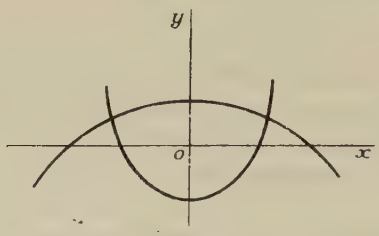
$$y = \frac{x^2 - C^2}{2C}, \tag{14}$$

où C désigne une constante arbitraire, et qui est représentée (1), pour C positif et pour C négatif, par les deux familles de paraboles de foyer O et

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, 1896, p. 456.

d'axe Oy (*fig.* 4). Ces deux familles de paraboles, selon l'approximation définie plus haut, sont les projections sur le plan tangent xOy des lignes de courbure de la surface S au voisinage de l'ombilic O : ces projections approchées sont orthogonales comme les lignes de courbure elles-mêmes. Il résulte notamment, *résultat classique*, qu'*aucune autre ligne de courbure de la surface du second degré n'aboutit à l'ombilic que la section principale passant en ce point.*

Fig. 4.



δ *positif,* Δ *négatif.* — Le discriminant δ étant de même supposé positif, considérons le second cas où le discriminant Δ est négatif, c'est-à-dire où l'équation (7) donnant les coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales de l'équation (3) qui aboutissent à l'origine O,

$$(2\alpha + 1)t^2 + \gamma t + \beta = 0,$$

a, en outre de la racine $t = \infty$, deux racines réelles et distinctes, soient t_1 et t_2. A la racine t_1 correspondent une solution holomorphe $y_1(x)$ représentée par une courbe C_1 tangente à la droite $y = t_1 x$, et des courbes intégrales qui peuvent présenter l'une ou l'autre des trois dispositions de figure définies plus haut.

Reprenons les formules d'un calcul qui précède, soient

$$\frac{y}{x} = t, \qquad x\frac{dt}{dx} = f(t) + xS(x, t),$$

si l'on pose

$$f(t) = -(\alpha + 1)t \pm \sqrt{\alpha^2 t^2 - \beta - \gamma t},$$

et si l'on désigne par $S(x, t)$ une fonction de x holomorphe pour $x = 0$ et dont les coefficients du développement en série entière en x dépendent de la variable t : l'équation algébrique

$$f(t) = 0$$

a les mêmes racines t_1 et t_2 que l'équation (7). Par comparaison avec la notation antérieure, désignons ici par $\frac{1}{n_1 - 1}$ le coefficient de $t - t_1$ dans le développement de la fonction $f(t)$ en série entière en $t - t_1$. La position du nombre n_1 par rapport aux deux nombres zéro et 1 détermine, comme précédemment la position du nombre n, l'une ou l'autre des trois dispositions de figure :

pour $n_1 > 1$, la disposition T où existent des solutions de l'équation (3) voisines de la solution $y_1(x)$, et représentées par un faisceau tangent à la droite $y = t_1 x$: pour $0 < n_1 < 1$, la disposition A où existent des courbes intégrales asymptotes à la droite $y = t_1 x$ dans un certain voisinage du point O; enfin, pour $n_1 < 0$, la disposition P où existent dans un certain voisinage O des courbes intégrales d'allure parabolique ayant pour direction asymptotique la droite $y = t_1 x$.

Le coefficient $\frac{1}{n_1 - 1}$ admet les expressions

$$\frac{1}{n_1 - 1} = f'(t_1) = -\alpha - 1 + \frac{\alpha^2 t_1 - \frac{\gamma}{2}}{\pm\sqrt{\alpha^2 t_1^2 - \beta - \gamma t_1}} = -\alpha - 1 + \frac{\alpha^2 t_1 - \frac{\gamma}{2}}{(\alpha + 1) t_1},$$

où devant le radical le signe est le même que dans l'expression de $f(t)$, d'où

$$n_1 = \frac{\alpha t_1 + \frac{\gamma}{2}}{(2\alpha + 1) t_1 + \frac{\gamma}{2}} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{\alpha t_2 + \frac{\gamma}{2}}{(2\alpha + 1) t_2 + \frac{\gamma}{2}}$$

pour le coefficient n_2 correspondant de même à la racine t_2.

On déduit de ces deux expressions les relations simples

$$n_1 + n_2 = \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}, \qquad n_1 n_2 = -\frac{\delta}{(2\alpha + 1)\Delta},$$

que nous écrirons sous les formes symétriques

$$n + n_1 + n_2 = 1 \tag{15}$$

et

$$n n_1 n_2 = -\frac{\delta}{(2\alpha + 1)^2 \Delta}. \tag{16}$$

On remarque d'ailleurs que la première de ces relations se déduit immédiatement de la relation

$$\frac{1}{f'(t_1)} + \frac{1}{f'(t_2)} + 1 + \frac{1}{2\alpha + 1} = 0,$$

qui exprime que sur la surface de Riemann correspondante les résidus des pôles de la fonction algébrique

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{(\alpha + 1)t + \sqrt{\alpha^2 t^2 - \beta - \gamma t}}$$

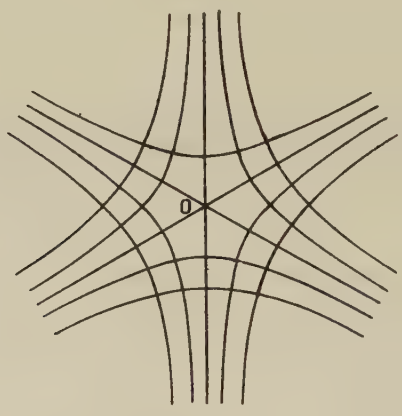
ont une somme nulle.

Il résulte de la relation (16) que les trois familles de courbes intégrales de l'équation (3) correspondant aux trois valeurs $t = \infty$, $t = t_1$, $t = t_2$ ne peuvent présenter toutes les combinaisons des dispositions T, A, P qu'on peut imaginer *a priori*. En effet, δ étant positif et Δ négatif, le produit $n n_1 n_2$ est positif, d'où deux cas seulement : ou bien les nombres n, n_1, n_2 sont tous trois positifs, ou

bien l'un, soit n, est positif, et n_1 et n_2 sont négatifs. En outre, dans le premier cas, n, n_1, n_2 sont aussi tous trois inférieurs à 1, d'après la relation (15), et d'ailleurs α est positif; et dans le second cas, n est supérieur à 1 d'après la même relation, et α compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro.

δ positif, Δ négatif, α positif. — En premier lieu, si les nombres n, n_1, n_2 sont tous trois positifs et inférieurs à 1, ou encore si α est positif, les trois directions $t=\infty$, $t=t_1$, $t=t_2$ correspondent à des familles de courbes de la disposition A. Ainsi il existe trois courbes intégrales représentant des solutions holomorphes et passant au point O, la droite Oy et deux courbes, soient C_1 et C_2, tangentes aux deux droites $y=t_1x$, $y=t_2x$; dans un certain voisinage et

Fig. 5.



de part et d'autre du point O, et aussi de part et d'autre de chacune de ces courbes, il existe une famille de courbes intégrales qui sont asymptotes à la droite Oy ou à la tangente $y=t_1x$, $y=t_2x$. Au total la configuration obtenue est représentée ci-dessus (*fig.* 5) par reproduction (1) d'une figure de Darboux, où les deux courbes C_1 et C_2 sont les deux droites faisant avec Oy des angles de 60°.

Nous prendrons comme exemple pour différentes valeurs du coefficient α l'équation

$$xy'^2+2\alpha yy'-x=0. \tag{17}$$

qui correspond aux valeurs $\beta=-1$, $\gamma=0$ des coefficients de l'équation (5), et aux valeurs des deux discriminants

$$\delta=4\alpha^2, \qquad \Delta=-4(2\alpha+1)=-\frac{4}{n},$$

(1) *Loc. cit.*, p. 455, fig. 92.

puisqu'on a

$$n = \frac{1}{2\alpha + 1}.$$

Rappelons que nous avons obtenu déjà une équation de la forme (17) pour déterminer les lignes de courbure au voisinage d'un ombilic sur une surface symétrique par rapport à un plan passant par cet ombilic; nous avons obtenu notamment l'équation (13) correspondant à la valeur $\alpha = -1$ et au cas où la surface considérée est du deuxième degré.

La solution générale de l'équation (17) est pour α ou n quelconque donnée par les formules

$$(18)\qquad y = \frac{x}{\alpha}\frac{1 - y'^2}{2y'}, \qquad x = \frac{Cy'}{(y'^2 - n)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad \text{avec} \quad n = \frac{1}{2\alpha + 1},$$

C désignant une constante arbitraire positive ou négative. Dans la seconde des formules (18), et plus loin dans les formules analogues où C désignera de même une constante arbitraire positive ou négative, il suffit par homothétie de donner à la constante C une valeur particulière positive. D'ailleurs nous avons vu que d'une façon générale, quand le discriminant δ est positif, les solutions de l'équation (3) se séparent en deux familles distinctes, ne comportant pas de passage continu de l'une à l'autre, et correspondant l'une au signe +, l'autre au signe — placé devant le radical de l'équation (4) : dans le cas particulier de l'équation (17), et plus généralement de l'équation réduite et homogène (6). ces deux familles se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'origine O.

Dans l'équation (17), le discriminant δ est positif; Δ, qui était positif pour $\alpha = -1$, $n = -1$ dans l'équation (13), est négatif pour n positif. Nous aurons un exemple des équations correspondant aux inégalités $\delta > 0, \Delta < 0$, en prenant $\alpha = 1$, $n = \frac{1}{3}$, et cet exemple rentrera dans le premier des deux cas définis précédemment, puisque n est compris entre zéro et 1. D'où l'équation

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0;$$

la solution générale (15) devient

$$y = x\frac{1 - y'^2}{2y'}, \qquad x = \frac{Cy'}{\left(y'^2 - \frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

et, si l'on fait

$$y' = \tan\varphi \qquad \text{et} \qquad \left(C = \frac{2C}{3^{\frac{2}{3}}}\right),$$

$$(19)\qquad x = \frac{C\sin 2\varphi}{(\cos 3\varphi)^{\frac{2}{3}}}, \qquad y = \frac{C\cos 2\varphi}{(\cos 3\varphi)^{\frac{2}{3}}}.$$

La courbe obtenue est la symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe représentée avec les coordonnées polaires r, θ correspondant aux coordonnées cartésiennes x, y, par l'équation simple

$$r = \frac{C}{\left(\cos\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

à partir de laquelle les méthodes de construction élémentaires donnent la figure 5.

δ positif, Δ négatif, $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. — Les discriminants δ et Δ étant de même respectivement positif et négatif, considérons le second cas défini plus haut, où le nombre n est positif et d'ailleurs supérieur à 1, donc α compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro, et où les nombres n_1 et n_2 sont négatifs. Alors les courbes intégrales correspondant à la direction $t = \infty$ ont la disposition T, et les courbes correspondant aux directions t_1 et t_2 ont la disposition P. Au total il existe dans chacun des quatre quadrants du plan xOy un faisceau de courbes intégrales tangentes à la courbe particulière $x = 0$; et de plus, en outre des deux courbes C_1 et C_2 représentant les deux autres solutions holomorphes et tangentes aux deux droites $y = t_1 x$, $y = t_2 x$, il existe, dans un certain voisinage et de part et d'autre du point O, et aussi de part et d'autre de chacune des courbes C_1 et C_2, des courbes intégrales d'allure parabolique admettant comme directions asymptotiques les directions t_1 et t_2. La configuration obtenue (*fig.* 6) est encore une configuration représentée (¹) par Darboux, quand les deux courbes C_1 et C_2 sont les deux droites $y = \pm x\sqrt{3}$.

Pour obtenir cette configuration, faisons dans l'équation (17) $\alpha = -\frac{1}{3}$, d'où $n = 3$, $\delta > 0$, $\Delta < 0$, et l'équation

$$x y'^2 - \frac{2}{3} y y' - x = 0. \tag{20}$$

La solution générale (18) devient

$$y = -3x\frac{1 - y'^2}{2y'}, \qquad x = \frac{C y'}{(y'^2 - 3)^2},$$

et, si l'on fait

$$y' = -\tan\varphi, \qquad \text{et} \qquad (C_1 = -8C),$$

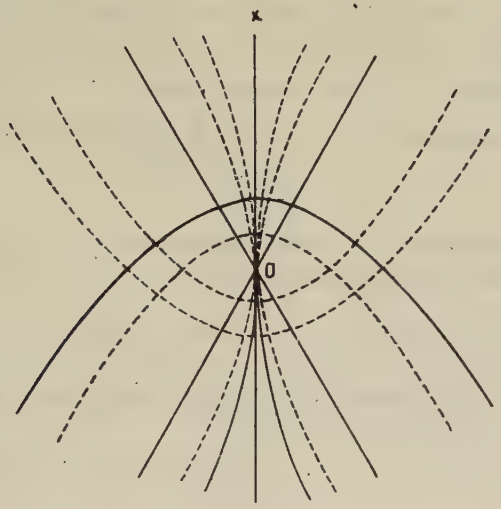
$$x = \frac{C\sin^2 2\varphi}{\sin^2 3\varphi}, \qquad y = \frac{3C\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi}{\sin^2 3\varphi}. \tag{21}$$

Quand le paramètre φ croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$, le point x, y décrit sur la figure 6 et à

(¹) *Loc. cit.*, p. 455, fig. 91.

droite de Oy, les deux branches paraboliques tracées en traits pleins, l'une joignant le sommet au point à l'infini de la droite $y = -x\sqrt{3}$, l'autre joignant ce point à l'infini à l'origine O. Une symétrie par rapport à l'axe Oy, puis une symétrie par rapport au point O donnent l'une des deux courbes intégrales tracées sur la figure 6 et correspondant à deux valeurs opposées de la constante C.

Fig. 6.



Indiquons, en rapprochant ces résultats et un résultat antérieur, l'exemple d'une surface à un ombilic de laquelle aboutissent une infinité de lignes de courbure, savoir la surface du troisième degré

$$z = k(x^2 + y^2) + 3ax^2y + cy^3,$$

k, a, c désignant trois constantes telles que la quantité $2\alpha = 1 - \frac{c}{a}$ soit comprise entre -1 et zéro, soit la surface

$$z = k(x^2 + y^2) + 2x^2y + y^3.$$

δ négatif. — Considérons maintenant le second cas où le discriminant δ est négatif, c'est-à-dire où la courbe K, dont l'équation est formée en annulant le discriminant de l'équation (3) en $\frac{dy}{dx}$, possède à l'origine O un point double à tangentes réelles et distinctes, et où par suite les courbes intégrales présentent en général des points de rebroussement au voisinage du point O. Comme plus haut nous supposerons successivement le discriminant Δ positif, puis négatif.

δ négatif, Δ positif. — Soient d'abord δ négatif et Δ positif. Alors il n'y a pas pour les courbes intégrales de l'équation (3) d'autre direction de

tangente à l'origine ni d'autre direction asymptotique au voisinage du point O que la direction Oy, qui nécessairement est située dans les deux angles où l'équation (3) en $\frac{dy}{dx}$ a ses racines réelles. En outre, il résulte des deux inégalités $\delta < 0$, $\Delta > 0$ et de la relation (8)

$$(2\alpha+1)\delta+\alpha^2\Delta+(\alpha+1)^2\gamma^2=0$$

que le facteur $2\alpha+1$ est positif : donc, au voisinage du point O, les courbes intégrales correspondant à la valeur $t=\infty$ présentent la disposition A si α est positif, et la disposition T si α est compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro.

Nous donnerons un exemple de chacun des deux cas à partir de l'équation

$$xy'^2+2\alpha yy'+x=0, \tag{22}$$

qui se déduit de l'équation (17) par la transformation (x, ix), et qui correspond aux valeurs des deux discriminants

$$\delta=-4\alpha^2, \qquad \Delta=4(2\alpha+1)=\frac{4}{n}.$$

La solution générale de l'équation (22) est donnée par les formules

$$y=-\frac{x}{\alpha}\frac{1+y'^2}{2y'}, \qquad x=\frac{Cy'}{(y'^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad \text{avec } n=\frac{1}{2\alpha+1}, \tag{23}$$

C désignant une constante arbitraire positive ou négative.

Intégrales singulières et enveloppes. — Si d'abord nous faisons dans l'équation (22) $\alpha=-1$, $n=-1$, nous obtenons l'équation

$$xy'^2-2yy'+x=0, \tag{24}$$

transformée de l'équation réduite (13) qui a déterminé les lignes de courbure d'une surface du second degré au voisinage d'un ombilic. La nouvelle solution générale, qui se déduit de la solution (14) de l'équation (13) par la transformation $(x, C; ix, -C)$,

$$y=\frac{x^2+C^2}{2C},$$

représente les paraboles de directrice Ox et d'axe Oy (*fig.* 7).

L'équation (24) peut s'écrire

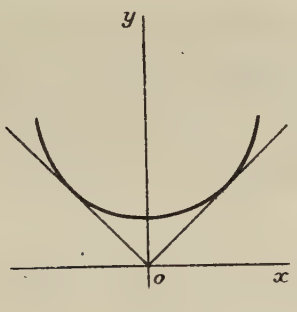
$$xy'-y=\pm\sqrt{y^2-x^2},$$

et la courbe K, lieu des points où cette équation a une racine double en y', se compose des deux bissectrices du plan xOy

$$y^2-x^2=0,$$

mais ces deux bissectrices sont ici des courbes intégrales, constituant avec la solution $x = 0$ les trois solutions holomorphes. Aussi sont-elles, selon une circonstance classique, non pas un lieu de points de rebroussement, mais des intégrales singulières et l'enveloppe des courbes représentant la solution générale.

Fig. 7.



δ négatif, Δ positif, α positif. — Pour réaliser les deux cas définis plus haut, nous donnerons successivement au coefficient α dans l'équation (22) les valeurs $\alpha = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, que nous avons considérées dans l'équation (17).

Soient $\alpha = 1$, $n = \frac{1}{3}$, et l'équation

$$xy'^2 + 2yy' + x = 0. \tag{25}$$

La solution générale est exprimée en fonction du paramètre y' par les formules (23), mais nous pouvons par le changement de variables $(x, y; ix, iy)$ déduire des formules (19) une expression de cette solution, soit

$$x = \frac{C \operatorname{sh} 2v}{(\operatorname{ch} 3v)^{\frac{2}{3}}}, \qquad y = \frac{C \operatorname{ch} 2v}{(\operatorname{ch} 3v)^{\frac{2}{3}}}; \tag{26}$$

la courbe correspondante, quand la constante C est positive, et quand le paramètre v prend les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, est l'arc A'SA de la figure 8. Nous obtenons une autre expression de la solution générale de l'équation (25) en faisant, dans les formules (26), le changement de variable $\left(v, v + \frac{i\pi}{2}\right)$, soit

$$x = \frac{C \operatorname{sh} 2v}{(\operatorname{sh} 3v)^{\frac{2}{3}}}, \qquad y = \frac{C \operatorname{ch} 2v}{(\operatorname{sh} 3v)^{\frac{2}{3}}}, \tag{27}$$

et en donnant aussi au nouveau paramètre v les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$; pour la même valeur de C et I désignant le point à l'infini sur Oy, la courbe correspondante se compose de deux arcs symétriques A'I, IA de la figure 8.

La courbe intégrale totale pour une valeur donnée de la constante C présente deux points de rebroussement en A et A′ sur les deux bissectrices

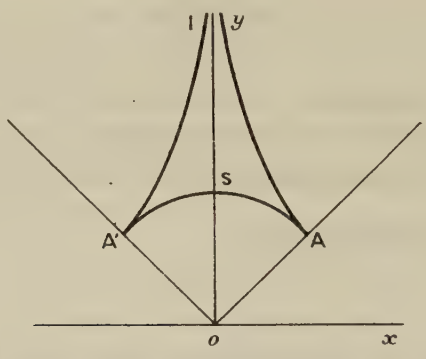
$$y^2 - x^2 = 0;$$

et en effet l'équation (25) peut s'écrire

$$(28) \qquad xy' + y = \pm\sqrt{y^2 - x^2},$$

et les deux bissectrices constituent la courbe K, lieu des points où cette équation a une racine double en y'. En faisant varier la constante C dans les formules (26) et (27), ou par une homothétie de rapport arbitraire de la figure 8, on obtient successivement toutes les courbes intégrales de l'équation (25); ces courbes forment un faisceau asymptote à la droite Oy, selon la disposition A.

Fig. 8.



Faisons plusieurs remarques. L'arc A′SA satisfait à l'équation (28) où le radical est précédé du signe +, et les arcs A′I, IA satisfont à la même équation où le radical est précédé du signe —. C'est là une circonstance générale quand le discriminant δ est négatif, et que les courbes intégrales de l'équation (3) présentent des points de rebroussement au voisinage du point O : nécessairement ces courbes se décomposent en arcs sur lesquels le radical de l'équation (4) est précédé du signe + pour les uns, du signe — pour les autres; et les points de séparation de ces arcs sont les points de rebroussement, dont le lieu est la courbe K.

Remarque sur une représentation paramétrique. — Quand, dans la solution générale (23), les variables x et y sont exprimées en fonction de la dérivée y', cette dérivée, bien entendu, prend seulement des valeurs réelles : au contraire, dans la représentation obtenue, on passe au point A de l'un à l'autre des arcs de rebroussement par un prolongement analytique où le paramètre représentatif prend des valeurs imaginaires. En effet, les formules (27) résultent des formules (26) par le changement de variable $\left(v,\ v + \frac{i\pi}{2}\right)$, et l'on passe de

l'arc SA, sur lequel dans les formules (26) v est supposé réel et tend vers $-\infty$, à l'arc AI en supposant qu'au point ∞ du plan complexe la variable v quitte l'axe des quantités réelles et décrive en sens inverse la parallèle à cet axe d'ordonnée $\frac{\pi}{2}$.

Donnons un exemple analogue et plus simple. Si dans les expressions

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t$$

on remplace t par $t + \pi$, on obtient, pour les valeurs réelles du paramètre t, la même circonférence, mais deux représentations différentes de cette circonférence. Au contraire les expressions

$$x = \operatorname{ch} t, \qquad y = \operatorname{sh} t,$$

où t est un paramètre réel, représentent une branche d'une hyperbole : soit H cette hyperbole; si dans les mêmes expressions on remplace t par $t + i\pi$, elles deviennent

$$x = -\operatorname{ch} t, \qquad y = -\operatorname{sh} t,$$

et représentent pour t réel encore la seconde branche de l'hyperbole H. Ces deux branches d'hyperbole sont le prolongement analytique l'une de l'autre, mais dans le passage de l'une à l'autre le paramètre t prend nécessairement des valeurs imaginaires.

Bien entendu, les deux branches de l'hyperbole H peuvent être représentées en fonction d'un paramètre qui ne prend que des valeurs réelles, par exemple en coordonnées polaires ayant pour pôle un foyer et, au moyen de l'équation polaire de l'hyperbole, en fonction de l'angle polaire qui varie dans un intervalle réel de 2π. Mais rappelons que la même circonstance peut se rencontrer quand la variable indépendante, qu'est ici le paramètre de représentation, est donnée *a priori*, notamment est le temps en Mécanique. Ainsi Poincaré a proposé (¹) de prolonger analytiquement l'étude d'un mouvement au delà de la valeur infinie du temps, afin d'étendre la notion de stabilité à la Poisson; mais j'ai montré (²) qu'en fait dans un tel prolongement, dans les problèmes des deux corps et des trois corps, le temps prend nécessairement, comme le paramètre v considéré ici, des valeurs imaginaires.

δ négatif, Δ positif, $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. — Dans l'équation (22) faisons maintenant $\alpha = -\frac{1}{3}$, $n = 3$: cette équation devient

$$x y'^2 - \frac{2}{3} y y' + x = 0. \tag{29}$$

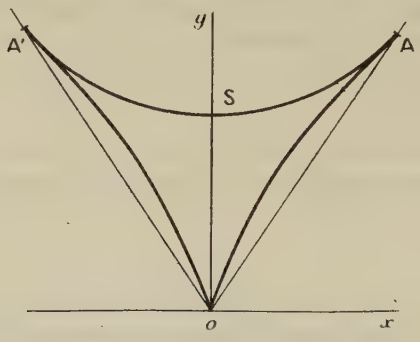
(¹) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, p. 168-174.
(²) *Annales de l'École Normale*, t. 39, 1922, p. 52-59.

A partir de la solution générale (21) de l'équation (20), par le changement de variables $(x, y; ix, iy)$, nous déduisons une expression de la solution générale de l'équation (29)

$$x = \frac{C\,\mathrm{sh}^2 2v}{\mathrm{sh}^2 3v}, \qquad y = \frac{3C\,\mathrm{sh}^2 2v\,\mathrm{ch}\,2v}{\mathrm{sh}^2 3v}; \tag{30}$$

la courbe correspondante, pour C positif et quand le paramètre réel v varie de $-\infty$ à $+\infty$, est l'arc A'SA de la figure 9. Des formules (30), par le chan-

Fig. 9.



gement de variable $\left(v, v + \frac{i\pi}{2}\right)$, nous déduisons une seconde expression de la solution générale de l'équation (29)

$$x = -\frac{C\,\mathrm{sh}^2 2v}{\mathrm{sh}^2 3v}, \qquad y = \frac{3C\,\mathrm{sh}^2 2v\,\mathrm{ch}\,2v}{\mathrm{ch}^2 3v},$$

qui correspond aux deux arcs symétriques A'O, OA de la figure 9 quand le nouveau paramètre v prend les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Quand la constante C varie, ou par homothétie, on obtient toutes les courbes intégrales de l'équation (29), qui forment un faisceau tangent en O à l'axe Oy selon la disposition T.

δ négatif, Δ négatif. — Supposons encore que le discriminant δ soit négatif, et que les courbes intégrales de l'équation (3) aient des points de rebroussement au voisinage du point O. Mais supposons que le discriminant Δ soit négatif aussi, c'est-à-dire que l'équation du second degré (7) ait deux racines réelles et distinctes, t_1 et t_2, et que les courbes intégrales admettent comme directions de tangentes au point O ou comme directions asymptotiques au voisinage du point O, les trois directions $t = \infty$, $t = t_1$, $t = t_2$, situées nécessairement dans les deux angles où l'équation (3) en $\frac{dy}{dx}$ a ses racines réelles.

Alors le produit des trois nombres correspondants n, n_1, n_2 est négatif d'après la relation (16)

$$n n_1 n_2 \qquad \frac{\delta}{(\alpha\gamma + \beta^2)\Delta},$$

et d'ailleurs la somme $n+n_1+n_2$ est égale à 1 d'après la relation (15). Donc, parmi les trois nombres n, n_1, n_2, l'un et un seul, soit n, est négatif, et les courbes intégrales correspondant à la direction $t=\infty$ ont la disposition P, c'est-à-dire sont, dans un certain voisinage du point O, des courbes paraboliques de direction asymptotique Oy. Les deux autres nombres, n_1 et n_2, sont positifs, mais ils peuvent séparément être supérieurs à 1, ou inférieurs à 1, et par suite les courbes intégrales correspondantes peuvent séparément être tangentes en O aux droites $y=t_1x$, $y=t_2x$, selon la disposition T, ou, dans un certain voisinage du point O, être asymptotes à ces deux droites, selon la disposition A.

Au total trois cas sont ainsi possibles, que nous pouvons caractériser par les trois symboles TTP, AAP, TAP. Nous nous bornerons à indiquer une équation simple correspondant à chacun des trois cas

$$(\mathrm{TTP}) \qquad xy'^2-\frac{4}{3}yy'+x=0,$$

$$(\mathrm{AAP}) \qquad xy'^2-4yy'+x=0,$$

$$(\mathrm{TAP}) \qquad xy'^2-\frac{yy'}{3}+y-\frac{2x}{3}=0.$$

Terminons par une remarque. L'équation différentielle du premier ordre en x et y et du second degré en $\frac{dy}{dx}$, dont l'étude étend le plus immédiatement l'étude des équations du premier degré en $\frac{dy}{dx}$, et notamment dans le domaine réel la théorie des nœuds et des cols, comporte évidemment comme cas de dégénérescence l'équation qu'on obtient en multipliant les deux équations

$$x\frac{dy}{dx}-ny=0, \qquad x\frac{dy}{dx}-py=0,$$

soit

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(n+p)xy\frac{dy}{dx}+npy^2=0,$$

n et p désignant deux constantes. Remarquons que l'équation ainsi obtenue ne rentre pas parmi les équations de la forme (1) que nous venons de considérer dans ce Mémoire, et qui, par suite, constituent, par rapport aux équations du premier degré, une classe nouvelle.

EXEMPLES CONCRETS

D'ÉTUDE ASYMPTOTIQUE D'OSCILLATIONS DE RELAXATION

PAR M. J. HAAG.

Introduction.

Dans un précédent Mémoire (¹), j'ai fait une étude asymptotique générale des oscillations de relaxation. Je me propose, dans le présent travail, d'appliquer les résultats obtenus à deux exemples concrets : le cas où *la courbe fondamentale se compose de segments rectilignes* et l'*exemple de M. van der Pol*. Procédant ensuite à l'intégration directe, je pourrai *contrôler numériquement* la valeur pratique des formules asymptotiques précédemment établies.

Dans un chapitre préliminaire, j'intégrerai l'*équation différentielle de raccordement dans le cas où l'ordre du point frontière est égal à* 2, ce qui est pour ainsi dire le cas général et, en particulier, celui de l'exemple de M. van der Pol.

Je renverrai fréquemment le lecteur à mon premier Mémoire et je conviens, dès maintenant, d'affecter de l'indice 1 les numéros d'équations ou de paragraphes se rapportant au dit Mémoire.

CHAPITRE I.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RACCORDEMENT POUR $r = 2$.

1. *Intégrale générale.* — L'équation (39_1) s'écrit, en supposant $\sigma = \sigma' = \sigma'' = 1$, comme au n° 32_1,

$$\frac{ds}{dZ} = s^2 - Z. \tag{1}$$

Pour obtenir le cas du n° 36_1, il suffira de changer s en $-s$ et Z en $-Z$.

(¹) *Ann. Ec. Norm.*, (3), LX, fasc. 1, 2, 1943, p. 35 à 111.

J'ai étudié, il y a quelques années (¹), l'intégrale générale de cette équation de Riccati, au moyen des *fonctions de Bessel*. Elle se présente sous la forme

$$s=\frac{3x}{2Z}\,\frac{C\,J_{\frac{2}{3}}(x)-J_{-\frac{2}{3}}(x)}{C\,J_{-\frac{1}{3}}(x)+J_{\frac{1}{3}}(x)},\qquad Z^3=-\frac{9x^2}{4},\tag{2}$$

où C désigne la constante d'intégration et $J_n(x)$ la fonction de Bessel définie par

$$J_n(x)=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n E_n\left(\frac{x^2}{4}\right),\tag{3}$$

$$E_n(t)=1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-t)^h}{h!\,(n+1)(n+2)\dots(n+h)}.\tag{4}$$

En tenant compte de (3), l'équation (2) s'écrit

$$s=\frac{3x}{2Z}\,\frac{\dfrac{3C}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}E_{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}E_{-\frac{2}{3}}}{\dfrac{C}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}E_{-\frac{1}{3}}+\dfrac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3}}}.$$

Multiplions haut et bas par $\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; il vient, en tenant compte de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$,

$$s=\frac{C\,F(Z)-F_1(Z)}{F_2(Z)-C\,F_3(Z)},\tag{5}$$

en posant

$$F(Z)=AZ^2E_{\frac{2}{3}}(t),\qquad F_1(Z)=E_{-\frac{2}{3}}(t),\qquad F_2(Z)=ZE_{\frac{1}{3}}(t),\qquad F_3(Z)=2AE_{-\frac{1}{3}}(t);\tag{6}$$

avec

$$t=-\frac{Z^3}{9}\tag{7}$$

et (²)

$$A=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{4\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\times\sqrt[3]{96}}.\tag{8}$$

(¹) *Bull. Sc. Math.*, avril 1938. Il suffit de changer Z en $-Z$ dans l'équation étudiée dans ce travail pour obtenir l'équation (1) ci-dessus. Signalons de plus que la formule (13) se simplifie en tenant compte de (12) et donne immédiatement la formule (2) ci-dessus.

(²) On passe de la première forme de A à la seconde en utilisant la formule

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)=2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right),$$

qui se déduit elle-même du théorème de multiplication de Gauss.

Cette constante A se calcule facilement, en utilisant la formule

$$\log\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{5\pi}{21} + \log 6 + 0{,}030466\,32,$$

déduite d'un développement donné par Hoüel (1). On obtient ainsi

$$\log A = \bar{1}{,}836\,2359; \qquad A = 0{,}685\,86\,06.$$

2. *Fonctions de raccordement.* — La fonction de raccordement du n° 32_1 est obtenue pour $C = 1$; c'est la *solution exceptionnelle* (2) de l'équation (1).

Pour les grandes valeurs positives de Z, on a la formule asymptotique (3)

$$s = \frac{3u}{2Z}\frac{S_{n-1}(u)}{S_n(u)} \qquad \left(n = -\frac{1}{3},\ u = \frac{2}{3}Z\sqrt{Z}\right);$$

avec

$$S_n(u) = 1 - \sum_{k=1}\frac{b_{nk}}{u^k}, \qquad b_{nk} = \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)\dots[4n^2-(2k-1)^2]}{8^k k!}.$$

J'ai indiqué (4) une méthode de calcul du rapport $\frac{S_{n-1}(u)}{S_n(u)}$ et calculé explicitement les cinq premiers termes du développement. Pour $n = -\frac{1}{3}$, on obtient

$$\frac{s}{\sqrt{Z}} = 1 - \frac{1}{6u} - \frac{5}{72u^2} + \frac{5}{72u^3} - \frac{1105}{81\times 128u^4} - \dots. \tag{9}$$

En résolvant cette équation par rapport à Z, on trouve

$$\frac{Z}{s^2} = 1 - \frac{1}{2s^3} + \frac{1}{8s^6} - \frac{5}{32s^9} + \frac{11}{32s^{12}} - \dots.$$

Cette formule est bien ce que donne la formule (84_1) pour $r = 2$.

De la formule (9), on déduit facilement le développement asymptotique

$$W = s^2 - Z = \frac{1}{2\sqrt{Z}} - \frac{1}{4Z^2} + \frac{25}{64Z^3\sqrt{Z}} - \frac{15}{16Z^5} + \dots. \tag{10}$$

La fonction de raccordement *à gauche* du point frontière (n° 36_1, cas II) est obtenue pour $C \neq 1$. De plus, nous changeons Z en $-Z$ et s en $-s$; de sorte que la formule (5) devient

$$s = \frac{C F(-Z) - F_1(-Z)}{C F_2(-Z) - F_2(-Z)}. \tag{11}$$

---

(1) *Recueil de formules et de tables numériques*, 3e édition, p. 60. Faire $x = \frac{1}{6}$ dans le développement et utiliser la formule $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 6\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)$. Le développement converge très rapidement.

(2) *Loc. cit.*, n° 8.

(3) *Loc. cit.*, n° 9.

(4) *Loc. cit.*, n° 11.

La constante C est déterminée par la condition que s s'annule pour $Z = Z_0$, soit

$$C = \frac{F_1(-Z_0)}{F(-Z_0)}. \tag{12}$$

Quant à la limite H, elle est obtenue pour $s = \infty$; c'est la plus petite racine positive de l'équation

$$CF_3(-H) - F_2(-H) = 0. \tag{13}$$

3. *Calcul des fonctions* $F_i(Z)$. — J'ai calculé ces fonctions à partir des formules (6) et (4), pour les valeurs de Z comprises entre $+3$ et -3 et échelonnées de dixième en dixième. Pour les grandes valeurs positives de Z, F est asymptotique à F_1 et F_2 l'est à F_3, les quatre fonctions devenant très grandes. D'autre part, ces valeurs interviennent uniquement dans le cas $C = 1$. Il s'ensuit que la formule (11) se présente à la limite sous la forme indéterminée $\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}$. Il en résulte une *indétermination numérique* se traduisant par la disparition d'un grand nombre de chiffres significatifs dans les deux soustractions devant fournir le numérateur et le dénominateur. Pour que les chiffres restants soient en nombre suffisant, il faut pousser le calcul des fonctions F_i jusqu'à une approximation très supérieure à celle que l'on recherche pour s. C'est ainsi que, pour $Z = 3$, j'ai dû utiliser des tables de logarithmes à 7 décimales et calculer 9 ou 10 termes de la série (4). Au fur et à mesure que Z diminue, les calculs deviennent plus faciles. Ils deviendraient au contraire plus pénibles et rapidement inexécutables si l'on voulait calculer s pour $Z > 3$. Fort heureusement, les formules asymptotiques (9) ou (10) peuvent être utilisées pratiquement à partir de $Z = 3$.

Le tableau ci-dessous donne les résultats numériques obtenus :

Z.	F.	F_1.	F_2.	F_3.	s.	W.
3.....	25,54357	25,58939	15,64385	15,66932	1,807	0,265
2,9.....	21,27372	21,32796	13,30494	13,33541	1,780	0,269
2,8.....	17,73514	17,82089	11,35315	11,38951	1,753	0,274
2,7.....	14,85388	14,92855	9,72030	9,76357	1,726	0,278
2,6.....	12,45111	12,53827	8,35073	8,40208	1,698	0,282
2,5.....	10,45751	10,55893	7,19896	7,25973	1,669	0,286
2,4.....	8,79909	8,91670	6,22772	6,29942	1,640	0,291
2,3.....	7,41578	7,55168	5,40639	5,49075	1,611	0,296
2,2.....	6,25871	6,41521	4,70979	4,80875	1,581	0,301
2,1.....	5,28799	5,46748	4,11708	4,23280	1,551	0,306
2.....	4,47115	4,67627	3,61107	3,74601	1,520	0,311
1,9.....	3,78159	4,01510	3,17549	3,33434	1,489	0,316
1,8.....	3,19755	3,46231	2,80445	2,98618	1,457	0,322
1,7.....	2,70118	3,00007	2,48199	2,69186	1,424	0,328
1,6.....	2,2780	2,6140	2,20188	2,44351	1,391	0,335
1,5.....	1,9157	2,2919	1,95708	2,23429	1,357	0,342
1,4.....	1,6047	2,0239	1,74170	2,05867	1,322	0,349
1,3.....	1,3368	1,8018	1,55077	1,91192	1,287	0,357

Z.	F.	F_1.	F_2.	F_3.	s.	W.
1,2.....	1,1056	1,6186	1,38005	1,79009	1,251	0.366
1,1.....	0,9056	1,4688	1,22593	1,68977	1,214	0,375
1.....	0,7326	1,3474	1,08534	1,60807	1,176	0.384
0,9.....	0,5830	1,2505	0,95563	1,54248	1,137	0,394
0,8.....	0,4541	1,1743	0,83455	1,49079	1,097	0,405
0.7.....	0.3438	1,1160	0,72017	1,45104	1,057	0,417
0,6.....	0,25048	1,07265	0,61086	1,42146	1,015	0,429
0,5.....	0,17290	1,04188	0,50522	1,40042	0,971	0,442
0,4.....	0,11021	1,02139	0,40214	1,38638	0,926	0,457
0,3.....	0,06184	1,00901	0,30068	1,37790	0,879	0,473
0,2.....	0,02745	1,00267	0,20013	1,37356	0,831	0,491
0,1.....	0,00686	1,00033	0,10001	1,37195	0,781	0,510
0.....	0	1	0	1,37172	0,729	0,531
−0,1.....	0,00686	0,99967	−0,09999	1,3715	0,675	0,555
−0,2.....	0,02742	0,99733	−0,19987	1,3699	0,618	0,582
−0,3.....	0,06162	0,99101	−0,29932	1,3656	0,559	0,612
−0,4.....	0,10927	0,97853	−0,39787	1,3571	0,496	0,646
−0,5.....	0,17004	0,95855	−0,49480	1,3433	0,429	0,684
−0,6.....	0,24337	0,92865	−0,58925	1,3227	0,359	0,728
−0,7.....	0,3284	0,8873	−0,68015	1,2942	0,283	0,780
−0,8.....	0,4241	0,8329	−0,76628	1,2567	0,202	0,841
−0,9.....	0,5290	0,7639	−0,84626	1,2091	0,114	0,913
−1.....	0,6411	0,6803	−0,91862	1,1506	0,019	1,000
−1,1.....	0,7583	0,5804	−0,9818	1,0807	− 0,086	1,107
−1,2.....	0,8779	0,4641	−1,0342	0,9989	− 0,204	1,242
−1,3.....	0,9969	0,3324	−1,0742	0,9051	− 0,336	1,413
−1,4.....	1,1121	0,1855	−1,1002	0,7996	− 0,488	1,638
−1,5.....	1,2196	0,0250	−1,1108	0,6830	− 0,666	1,944
−1,6.....	1,3156	−0,1470	−1,1048	0,5561	− 0,881	2,376
−1,7.....	1,3962	−0,3275	−1,0811	0,4204	− 1,148	3,018
−1,8.....	1,4570	−0,5133	−1,0391	0,2775	− 1,497	4,041
−1,9.....	1,4948	−0,7001	−0,97838	0,1297	− 1,980	5,820
−2.....	1,5053	−0,8834	−0,89916	−0,0205	− 2,720	9,398
−2,1.....	1,4856	−1,0581	−0,80200	−0,1704	− 4,027	18,390
−2,2.....	1,4330	−1,2184	−0,68798	−0,3166	− 7,150	53,32
−2,3.....	1,3458	−1,3589	−0,55895	−0,4558	−26,22	689,8
−2,4.....	1,2233	−1,4736	−0,41709	−0,5846	+16,08	−
−2,5.....	1,067	−1,557	−0,2653	−0,699	−	−
−2,6.....	0,874	−1,605	−0,1069	−0,796	−	−
−2,7.....	0,652	−1,612	+0,0543	−0,879	−	−
−2,8.....	0,404	−1,574	0,2140	−0,926	−	−
−2,9.....	0,136	−1,491	0,3675	−0,954	−	
−3.....	−0,146	−1,361	0,5106	−0,954	−	

Les valeurs de s et W concernent le *cas exceptionnel* $C = 1$. Pour $Z = 3$ et 2,9, la formule asymptotique (10) donne exactement le même résultat que le calcul direct.

4. *Calcul numérique des fonctions de raccordement à gauche du point frontière.* — Une telle fonction est définie par la valeur de Z_0. J'ai donc commencé par calculer C en fonction de Z_0, au moyen de la formule (12) et des

valeurs numériques précédemment obtenues pour les fonctions F et F_1. Le tableau ci-dessous donne le résultat de ce calcul, fait à la règle et régularisé par une courbe. Les valeurs positives de Z_0 ont été seules envisagées, puisque Z_0 ne peut être négatif au départ du point frontière. Je donne en même temps les valeurs correspondantes de H, obtenues en construisant la courbe (13) :

Z_0.	C.	H.	Z_0.	C.	H.	Z_0.	C.	H.
0.....	0	1,988	0,7...	—0,525	2,170	1,4...	— 1,375	2,583
0,1...	—0,0729	1,992	0,8...	—0,610	2,218	1,5...	— 1,627	2,654
0,2...	—0,1460	2,005	0,9...	—0,700	2,272	1,6...	— 1,987	2,726
0,3...	—0,219	2,026	1.....	—0,798	2,330	1,7...	— 2,575	2,802
0,4...	—0,294	2,057	1,1...	—0,908	2,390	1,8...	— 3,74	2,878
0,5...	—0,369	2,087	1,2...	—1,035	2,453	1,9...	— 7,55	2,954
0,6...	—0,445	2,126	1,3...	—1,187	2,515	2.....	+43,8	3,032

Pour C = 1, on a

$$Z_0 = 1,01890 \qquad \text{et} \qquad H = 2,33810.$$

J'ai ensuite calculé, à la règle, les valeurs de s pour des valeurs de Z_0 échelonnées de $\frac{2}{10}$ en $\frac{2}{10}$. Je ne pense pas qu'il soit utile de présenter ici le résultat de ce calcul.

5. *Calcul des intégrales des* n^os^ 52_1 *et* 53_1. — J'ai commencé par calculer l'intégrale

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{W^2} = \int_{-1,0189}^{Z} \frac{dZ}{W},$$

jusqu'à Z = 3, par la méthode des trapèzes. J'ai ensuite calculé les valeurs de e^{φ}.

Pour évaluer les intégrales M_i et n_i, j'ai dû partager l'intervalle d'intégration en deux parties, séparées par Z = 3. Les valeurs R_i et r_i desdites intégrales pour les grandes valeurs de s ont été calculées par des formules asymptotiques obtenues par la méthode de la note (D_1). On a, pour s très grand,

$$\frac{1}{W^2} = s^2\left(4 + \frac{2}{s^3} - \frac{7}{4s^6} + \frac{31}{4s^9} + \dots\right).$$

D'où, avec les notations de la note (D),

$$\alpha = 3, \qquad a = 4, \qquad k = 2, \qquad a_2 = -\frac{7}{4}, \qquad a_3 = \frac{31}{4};$$

$$g_0 = -c_0, \qquad g_1 = -c_1 - \frac{m}{4}c_0, \qquad g_2 = -c_2 + \frac{3-m}{4}c_1 + \frac{m(5-m)}{16}c_0,$$

$$g_3 = -c_3 + \frac{6-m}{4}c_2 + \frac{(m-3)(8-m)}{16}c_1 - \frac{7}{64}mc_0 + \frac{m(m-5)(8-m)}{64}c_0.$$

Pour R_4, on a

$$g(s) = sW = \frac{1}{2} - \frac{1}{8s^3} + \frac{5}{32s^6} - \frac{11}{32s^9} + \dots$$

Donc

$$m=0, \qquad c_0=\frac{1}{2}, \qquad c_1=-\frac{1}{8}, \qquad c_2=\frac{5}{32}, \qquad c_3=-\frac{11}{32}.$$

Des formules ci-dessus, on déduit g_0, g_1, g_2, g_3 et l'on a le développement asymptotique

$$R_1 e^{\bar{\varphi}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8s^2}-\frac{1}{4s^6}+\frac{49}{64s^9}+\dots$$

On calcule de même

$$R_2 e^{\bar{\varphi}}=\frac{3}{4}-\frac{3}{8s^2}+\frac{51}{64s^6}+\frac{123}{128s^9}+\dots$$

$$R_3 e^{\bar{\varphi}}=-\frac{3}{32s^5}+\frac{69}{128s^8}+\dots$$

$$R_4 e^{\bar{\varphi}}=\frac{3s}{4}-\frac{3}{16s^2}+\frac{69}{64s^5}-\frac{105}{64s^8}+\dots$$

$$R_5 e^{\bar{\varphi}}=-\frac{9s}{8}+\frac{9}{16s^2}-\frac{9}{4s^5}-\frac{63}{128s^8}+\dots$$

$$R_6 e^{\bar{\varphi}}=-s+\frac{1}{4s^2}-\frac{11}{16s^5}+\frac{73}{32s^8}+\dots$$

Pour les intégrales r_i, un calcul direct donne

$$r_1=-\frac{1}{24s^3}+\frac{5}{192s^9}-\frac{11}{288s^{12}}+\dots$$

$$r_2=-\frac{1}{8s^2}+\frac{1}{16s^5}-\frac{11}{128s^8}+\dots$$

$$r_3=\frac{1}{16s^2}-\frac{1}{20s^5}+\frac{49}{512s^8}+\dots$$

$$r_4=-\frac{3}{16s^2}+\frac{51}{320s^5}+\frac{123}{1024s^8}+\dots$$

Ces formules m'ont permis de calculer les R_i et r_i pour $Z=3$. J'ai ensuite calculé les fonctions M_1 et M_2 par la méthode des trapèzes pour les valeurs de Z comprises entre 3 et $Z_0=-1{,}0189$ et échelonnées de dixième en dixième; parce qu'elles sont nécessaires pour le calcul de M_3, M_4, M_5. Les valeurs des intégrales M_i et n_i de $Z=3$ à Z_0 ont été calculées par la méthode de Simpson et complétées par les R_i et r_i donnés par les formules ci-dessus. Voici les résultats :

$$M_1^0=-0{,}280; \quad M_2^0=0{,}279; \quad M_3^0=-0{,}0440; \quad M_4^0=0{,}347;$$
$$M_5^0=-0{,}367; \quad M_6^0=0{,}259;$$
$$n_1=0{,}653; \quad n_2=-0{,}521; \quad n_3=0{,}160; \quad n_4=-0{,}417.$$

En se reportant aux formules (132_1) (¹) et (134_1), on obtient la *déviation*

(¹) Dans la formule (132), lire $-$ et $-$ au lieu de $+$ et $+$.

au point frontière par la formule

$$(14)\qquad D_F = A_0\theta^2\left[1{,}01890 + \theta\left(\frac{0{,}280}{a} - 0{,}279\,b_0\right) + \theta^2\left(\frac{0{,}044}{a^2} - 0{,}347\,\frac{b_0}{a} + 0{,}367\,b_0^2 - 0{,}259\,b_1\right) + \dots\right].$$

De même, la formule (136_1) (1) devient

$$(15)\qquad J = \frac{A_0}{2a^2}\theta^3(\log\theta - 1{,}306 + 2A_0 a N_1) - \frac{A_0}{a^2}\theta^4(0{,}361 + 0{,}417\,ab_0) + \dots.$$

6. *Calcul des intégrales des nos* 59_1 *et* 60_1. — Il faut d'abord calculer la fonction

$$\varphi = \int_z^s \frac{ds}{W^2} = \int_H^Z \frac{dZ}{W}.$$

Ce calcul a été fait par la méthode des trapèzes et pour des valeurs de Z échelonnées de dixième en dixième. J'ai ensuite calculé par la méthode des trapèzes les fonctions

$$I_1(Z) = \int_{Z_0}^{Z} s e^{\varphi}\, dZ, \qquad I_2(Z) = \int_{Z_0}^{Z} \frac{s^2 e^{\varphi}}{W}\, dZ.$$

L'intégrale n_1 peut s'écrire

$$(16)\qquad n_1 = I_1(Z_1) + \int_{Z_1}^{H}\left(s e^{\varphi} - \frac{W}{s}\right) dZ - \log s_1,$$

Z_1 étant arbitrairement choisi entre Z_0 et H et s_1 désignant la valeur correspondante de s. J'ai fait le calcul pour trois valeurs de Z_1 en progression arithmétique de raison 0,2 et choisies de telle manière que le second terme puisse être calculé par la méthode de Simpson. En outre, *un* est compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs de s_1. Les résultats diffèrent très peu et j'ai adopté une valeur moyenne. J'ai ensuite régularisé en construisant la courbe (Z_0, n_1). Les écarts introduits par cette régularisation ont été très faibles, leur moyenne correspondant à une erreur relative de $\frac{1}{500}$ environ. L'intégrale n_2 peut s'écrire

$$(17)\qquad n_2 = I_2(Z_1) + \int_{Z_1}^{H}\left(\frac{s^2 e^{\varphi}}{W} - \frac{W}{s}\right) dZ - \log s_1.$$

La différence entre les seconds termes des formules (16) et (17) est

$$\int_{Z_1}^{H} s e^{\varphi}\,\frac{Z}{W}\, dZ.$$

J'ai calculé cette dernière intégrale pour les mêmes valeurs de Z_1 que précé-

(1) Dans cette formule, lire $2A_0 a N_1$ au lieu de N_1.

demment; puis, j'ai régularisé graphiquement les valeurs obtenues pour n_2; l'écart moyen est à peu près de $\frac{3}{1000}$ en valeur relative.

On a ensuite

$$n_5 = \frac{e^{-z_0}}{2Z_0} - n_{15}.$$

Les intégrales n_4, n_5, n_6 ont été calculées par la méthode de Simpson et ont donné des courbes régulières.

Les intégrales n_7, n_8, n_9 ont été calculées également par la méthode de Simpson; mais la fonction sous le signe $\int$ variant très rapidement au voisinage de $Z = H$, j'ai dû arrêter chaque intégrale un peu avant H, en calculant le reste par les développements ci-dessous :

$$R_7 = -\frac{\log s + n_1 + 0{,}5}{2s^2} + \frac{\log s + n_1}{2s^4} - \dots$$

$$R_8 = -\frac{2H}{s} - \frac{18\log s + 12n_1 + 6n_2 - 1}{12s^2} - \dots$$

$$R_9 = \frac{3H}{s} + \frac{6\log s + 6n_2 - 5}{6s^2} - \dots$$

L'intégrale n_{10} a été calculée comme n_1 et n_2. Les intégrales n_{11}, n_{12}, n_{13} ont été calculées par la méthode de Simpson. Elles ont toutes été régularisées graphiquement et les écarts moyens sont tous de l'ordre de quelques millièmes en valeur relative.

Quant aux valeurs de $K = e^{z_0}$, elles se déduisent des valeurs de la fonction e^z.

Le tableau ci-dessous donne le résultat de ces calculs :

Z_0	0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1.	1,2.	1,4.	1,6.	1,8.	2.
$-1000n_1$	226	234	250	274	304	337	370	404	438	472	500
$-1000n_2$	718	727	746	773	802	835	867	898	930	962	994
$-1000n_3$	∞	15,04	3,75	1,483	0,787	0,477	0,314	0,220	0,160	0,123	0,094
$1000n_4$	381	373	357	335	309	284	261	242	223	208	199
$1000n_5$	191	188	179	166	154	142	131	120	112	104	97
$-100n_6$	313	316	320	326	333	342	353	363	375	386	398
$-1000n_7$	171	169	162	153	143	135	126	118	110	103	97
$-100n_8$	348	350	354	360	368	377	385	394	403	414	430
$-100n_9$	404	407	413	421	430	439	450	462	476	491	505
$-1000n_{10}$	93	106	137	177	221	265	308	350	390	429	463
$1000n_{11}$	192	190	180	168	156	144	132	122	113	105	98
$100n_{12}$	316	318	323	329	337	347	357	367	377	388	400
$1000n_{13}$	953	744	607	505	431	374	330	294	266	240	222
1000K	0	159	287	419	513	588	648	691	733	765	791

Les intégrales n_i correspondant à $C = 1$ ont été calculées de la même manière; voici leurs valeurs écrites dans l'ordre des indices; le dernier nombre est K :

0,339; $-0{,}838$; 0,454; 0,281; 0,141; 3,43; $-0{,}134$;
$-3{,}77$; $-4{,}39$; $-0{,}269$; 0,142; 3,47; 0,369; 0,595.

Les points correspondants se placent très bien sur les courbes représentatives.

Signalons enfin que la constante K définie par la formule (111_1) n'est autre que $2n_{10}$ dans le cas $z_0=0$; elle vaut donc $-0{,}186$, et la constante k définie par (112_1) et qui intervient dans la section VI du chapitre V a pour valeur $0{,}830$.

CHAPITRE II.

COURBE FONDAMENTALE COMPOSÉE DE SEGMENTS DE DROITE.

7. *Étude directe du mouvement.* — La force visqueuse (résistante ou motrice) est proportionnelle à la vitesse. Par conséquent, la détermination du mouvement est élémentaire. Nous supposerons dorénavant que les unités ont été choisies de telle manière que $\omega=1$. Comme dans le précédent Mémoire, nous nous bornerons à étudier le mouvement sur la partie positive de Ox et en nous dirigeant toujours vers l'origine. Nous devrons donc faire croître ou décroître le temps t, suivant que le mouvement considéré se rapportera à l'arc inférieur ou à l'arc supérieur du cycle.

Supposons que la pente de (Γ) soit $\frac{2}{k}$. L'équation (1_1) devient

$$k\varepsilon x''+2x'+k\varepsilon x=0.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$(18)\qquad \begin{cases} r=\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2k^2}}{k\varepsilon}=-\dfrac{\varepsilon k}{2}\left(1+\dfrac{\varepsilon^2k^2}{4}+\dots\right), \\ r'=\dfrac{1}{r}=\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2k^2}}{k\varepsilon}=-\dfrac{2}{\varepsilon k}\left(1-\dfrac{\varepsilon^2k^2}{4}-\dfrac{\varepsilon^4k^4}{16}+\dots\right). \end{cases}$$

Pour ε infiniment petit, elles sont respectivement de l'ordre de ε et de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Soient x_0 et v_0 l'abscisse et la vitesse initiales. On a

$$(19)\qquad x=Ce^{rt}+C'e^{r't},$$

avec

$$(20)\qquad C=\frac{x_0r'-v_0}{r'-r}=\frac{x_0-rv_0}{1-r^2},\qquad C'=\frac{v_0-rx_0}{r'-r}=r\frac{v_0-rx_0}{1-r^2}.$$

La vitesse est

$$(21)\qquad v=rCe^{rt}+r'C'e^{r't}.$$

8. *Arc inférieur.* — Nous *partons du point terminal* au temps zéro, avec une vitesse nulle. Dans les formules précédentes, nous devons donc faire $v_0=0$; puis faire croître t à partir de zéro. Enfin, k est positif; donc, r et r' sont négatifs.

La formule (21) s'écrit

$$v=rC(e^{rt}-e^{r't})$$

et montre que $|v| < -rC$. *La vitesse reste infiniment petite* de l'ordre de ε. Le chemin parcouru ne peut être fini qu'au bout d'un temps infiniment grand de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. Mais alors la formule (19) s'écrit, *avec une erreur exponentielle*,

$$x = Ce^{r't}, \qquad t = r' \log \frac{x}{C} = r' \left[\log \frac{x}{x_0} + \log(1 - r^2) \right]. \tag{22}$$

De même, (21) se réduit à

$$v = rx. \tag{23}$$

9. Supposons maintenant que, pour $x < a < x_0$, *la force visqueuse devienne motrice*. Prenons l'origine des temps au début de cette nouvelle phase. Nous pouvons toujours utiliser les formules du n° 7, en y remplaçant x_0 par a et v_0 par la valeur déduite de (23). Cette fois, k est négatif; r et r' sont positifs.

Si rt n'est pas infiniment petit, $r't$ est infiniment grand; x est asymptotique à $C'e^{r't}$. Or, $C' < 0$; donc, x serait infiniment grand négatif et sortirait de l'intervalle dans lequel les formules sont applicables. Dès lors, nous devons supposer rt infiniment petit. Dans ce cas, Ce^{rt} est infiniment voisin de a et l'on a asymptotiquement

$$e^{r't} = \frac{x - a}{C'}, \qquad v = r'(x - a). \tag{24}$$

Comme $C' = O(\varepsilon^2)$, on voit que $t = O(-\varepsilon \log \varepsilon)$ et $v = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (1). Ceci est applicable jusqu'au moment où $x = 0$, si la force visqueuse garde la même expression.

10. Supposons maintenant que *la force visqueuse redevienne résistante* à partir d'une certaine valeur de x, que nous appellerons de nouveau x_0 et jusqu'à une certaine valeur positive x_1. Prenons comme nouvelle origine des temps le début de cette nouvelle phase. Nous appliquons encore les formules du n° 7, mais avec $k > 0$, $r < 0$, $r' < 0$. Comme $v_0 = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, rv_0 a une limite finie pour $\varepsilon = 0$; il s'ensuit que C a aussi une limite finie, que nous appelons a.

Si rt n'est pas infiniment petit, $r't$ est infiniment grand négatif et l'on peut écrire (22), avec une erreur exponentielle. Comme C est infiniment voisin de a, ceci n'est possible que si $a > x_1$.

Si $a < x_1$, nous devons supposer rt infiniment petit et nous avons asymptotiquement (24), jusqu'au moment où $x = x_1$. On voit que $t = O(\varepsilon)$ et $v = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

---

(1) Il peut sembler paradoxal, au premier abord, que le chemin parcouru soit fini, alors que $vt = O(-\log \varepsilon)$. Mais il ne faut pas oublier que l'on part avec une vitesse infiniment petite, et c'est ce départ qui introduit le facteur $\log \varepsilon$ dans la valeur asymptotique de t. Pour aller de x à x', il faut un temps asymptotique à $\varepsilon \log \frac{x - a}{x' - a} = O(\varepsilon)$.

Si $a > x_1$, on a encore asymptotiquement (24) tant que $t = O(\varepsilon)$. Mais, dès que $t = O(\varepsilon^{1-\alpha})$, si petit que soit le nombre positif α, $r't = O(\varepsilon^{-\alpha})$ et l'on a (22), à une erreur exponentielle près.

A partir de $x = x_1$, la force visqueuse redevient motrice (1), et ainsi de suite jusqu'à $x = 0$.

11. *Arc supérieur.* — Revenons au n° 8; mais faisons décroître t à partir de zéro.

Si $r't$ est infiniment grand, x est asymptotique à $Ce^{r't} < 0$. Donc, $r't$ doit rester fini. Mais alors rt est infiniment petit et l'on a asymptotiquement les formules (24), en y remplaçant a par x_0. Donc, $t = O(\varepsilon \log \varepsilon)$ et $v = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse du n° 9. Comme au n° 10, C et C' ont des limites finies pour $\varepsilon = 0$. La seconde est positive; mais la première peut être positive ou négative.

Si $\lim C > 0$, la vitesse devient infiniment petite pour $t = O(\varepsilon^{1-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$; en même temps, x est infiniment voisin de C. Dans ce cas, l'arc supérieur du cycle comprendrait au moins un arc de seconde espèce. Comme dans le premier Mémoire, nous rejetons cette hypothèse. Dès lors, supposons $\lim C < 0$.

Si la force visqueuse garde la même expression jusqu'à $x = 0$, l'origine est atteinte au temps

$$t = \frac{1}{r' - r} \log \frac{-C}{C'} = O(\varepsilon).$$

Pendant tout le mouvement, on a asymptotiquement

$$x = C + C'e^{r't}, \qquad v = r'(x - C); \tag{25}$$

la vitesse vaut $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Si la force visqueuse redevient résistante, comme au n° 10, r et r' redeviennent négatifs; de plus, les constantes C et C' sont finies et respectivement positive et négative. Si rt n'est pas infiniment petit, $r't$ est infiniment grand positif; x est asymptotique à $Ce^{r't} < 0$. Donc, rt doit rester infiniment petit et l'on a encore (25).

Par la suite, la force visqueuse redevient motrice et tout se passe comme précédemment.

En définitive, *pendant tout le parcours de l'arc supérieur, la vitesse est infiniment grande de l'ordre de* $\frac{1}{\varepsilon}$, sauf au voisinage du point terminal.

12. On retrouve bien, qualitativement, les propriétés générales des oscillations de relaxation, décrites dans le premier Mémoire. De plus, cet exemple

(1) Nous laissons de côté le cas où la courbe fondamentale comprendrait deux segments consécutifs ayant des pentes de même signe. Ce cas ne présenterait d'ailleurs aucune difficulté.

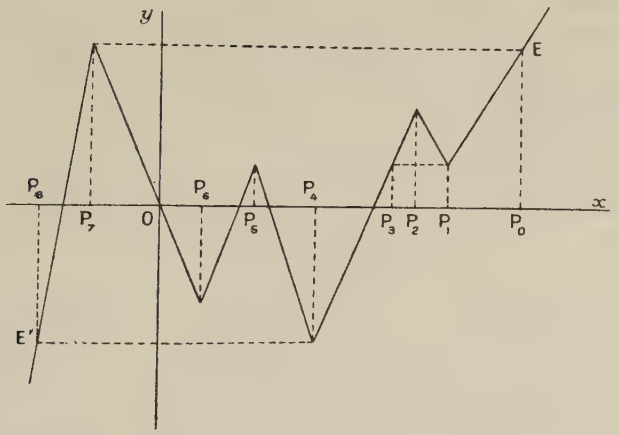
concret permet de *comprendre clairement les raisons de ce phénomène mécanique*, qui peut se résumer comme il suit :

Supposons par exemple que la courbe fondamentale ait la forme ci-dessous (*fig.* 1).

Partons du point terminal de droite; autrement dit, P est en P_0 avec une vitesse nulle. Il est rappelé vers O par la force élastique. Mais, comme il est freiné par une force visqueuse qui deviendrait très grande si la vitesse atteignait une valeur finie, cette vitesse ne peut que rester très petite. Le point P arrive ainsi très lentement dans la position P_1.

Puis, la force visqueuse devient brusquement motrice et agit dans le même sens que la force élastique. La vitesse, qui est encore très petite, se met à

Fig. 1.



augmenter plus vite que si la force élastique agissait seule. En un temps très court, elle devient assez grande pour que la force visqueuse soit très grande et, sous l'action de cette puissante force motrice, la vitesse devient rapidement très grande.

En P_2 commence un nouveau freinage. Comme la vitesse acquise est très grande, ce freinage est extrêmement énergique et la vitesse baisse rapidement. Si le freinage dure sur un assez long parcours (cas de la figure), la perte de vitesse est suffisante pour que la vitesse devienne très petite, sans pouvoir toutefois s'annuler, à cause de la force élastique. Ceci arrive dans le voisinage du point P_3 par exemple. A partir de ce point et jusqu'en P_4, la vitesse demeure très petite, comme sur le segment P_0P_1.

En P_4, la force visqueuse redevient motrice et la vitesse redevient rapidement très grande, comme à partir de P_1. En P_5, nouveau freinage énergique, qui dure jusqu'en P_6. Mais cette fois, le frein n'ayant pas agi assez longtemps, la vitesse

reste très grande et, à partir de P_6, se remet à augmenter. Le point P parvient ainsi en O.

A partir de O, la force élastique est résistante. Mais la force visqueuse continuant à être motrice, la vitesse reste très grande. En P_7, nouveau freinage énergique; ce freinage durant assez longtemps, la vitesse devient très petite dans le voisinage de P_8 et comme, cette fois, la force élastique est résistante, la vitesse s'annule rigoureusement en P_8.

Le point P revient vers la droite, avec une vitesse qui reste très petite jusqu'en P_7; puis devient très grande et le demeure jusqu'au voisinage de P_0, en dépit des coups de frein reçus sur les parcours P_6P_5 et P_3P_2. Par contre, le freinage, commencé en P_1, est assez persistant pour annuler rigoureusement la vitesse en P_0. Le cycle est alors terminé.

13. *Vérification des développements asymptotiques.* — Nous allons maintenant voir ce que deviennent les formules asymptotiques établies dans le premier Mémoire et nous vérifierons qu'elles sont identiques à celles qu'on peut déduire du calcul direct ci-dessus.

Commençons par l'arc inférieur.

14. *Premier arc de seconde espèce.* — Nous avons $\lambda' = \frac{2}{k}$; d'où (n° 52_1)

$$R_1 = \frac{xk}{2}, \qquad R_2 = \frac{xk^3}{8}.$$

Portant dans (79_1) :

$$u = \frac{kx}{2}\varepsilon^2\left(1 + \frac{k^2\varepsilon^2}{4} + \dots\right). \tag{26}$$

Les formules du n° 53_1 nous donnent ensuite

$$J_1 = \frac{k}{2}\log\frac{x}{x_0}, \qquad J_2 = \frac{k^3}{8}\left(\log\frac{x}{x_0} + \frac{1}{2}\right).$$

La formule (26_1) s'écrit d'autre part

$$\varepsilon t = \frac{2}{k}\log\frac{x_0}{x} + \frac{u}{x} + \varepsilon^2 J_1 + \varepsilon^4 J_2 + \dots$$

et devient, en tenant compte des formules ci-dessus,

$$k\varepsilon t = 2\log\frac{x_0}{x} + \frac{\varepsilon^2 k^2}{2}\left(1 + \log\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\varepsilon^4 k^4}{8}\left(\frac{3}{2} + \log\frac{x}{x_0}\right) + \dots. \tag{27}$$

Voyons maintenant le *calcul direct*. La formule (22) nous donne d'abord

$$t = r' \log\frac{x}{x_0} - r - \frac{r^2}{2} + \dots.$$

En utilisant (18), on retrouve bien (27).

Les formules (2_1) et (23) nous donnent maintenant

$$u = \lambda - y = -\varepsilon v = -\varepsilon x x'.$$

En tenant compte de (18), on retrouve (26).

15. *Arc de première espèce.* — Nous avons $A_0 = -\frac{2}{k}$. Puis

$$\lambda = b + A_0 \xi;$$

d'où $B = 0$, $b_n = 0$ et, d'après (122_1), $\alpha_n = \frac{1}{a}$. La fonction $X = \frac{\lambda - b}{A_0}$ (n° 55_1) se réduit à $X = \xi$. Les formules (124_1), (126_1) et (127_1) donnent ensuite

$$P = \frac{\xi}{a}, \qquad P_1 = -\frac{\xi}{a^2}, \qquad P_2 = 0.$$

Portant dans (141_1), il vient

$$(28)\quad \begin{cases} D_{00} = Z_0 + \log\frac{\xi}{0m} - \frac{\xi}{a}, \qquad D_{01} = \frac{Z_0}{m}, \\ D_{10} = \frac{m}{\xi} - \frac{2m+1}{ma} - \frac{\xi}{a^2} + \left(\frac{m}{a} + \frac{1}{\xi}\right)\log\frac{\xi}{0m} + \frac{1}{2a}\left(\log\frac{\xi}{0m}\right)^2. \end{cases}$$

La déviation est alors donnée par la formule (114_1), qui devient

$$(29)\qquad D = -\frac{20}{k}(D_{00} + 0D_{10} + \zeta D_{01} + \dots).$$

Nous avons ensuite, par (129_1) (¹) et (131_1),

$$Q = Q_1 = Q_2 = 0;$$

d'où (n° 58_1) :

$$(30)\qquad T_{00} = \log\frac{\xi}{0m}, \qquad T_{01} = -\frac{1}{m}, \qquad T_{10} = \frac{a+\xi}{a\xi}\log\frac{\xi}{0m} + \frac{m}{\xi} - \frac{2m+1}{ma}.$$

Le temps est alors donné par la formule (115_1), qui devient

$$(31)\qquad \varepsilon t = -\frac{20}{ak}(T_{00} + 0T_{10} + \zeta T_{01} + \dots).$$

16. Voyons maintenant ce que donne le *calcul direct*.

Nous devons d'abord résoudre l'équation (19) par rapport à t. A cet effet, posons

$$(32)\qquad e^{rt} = 1 + z, \qquad \log\frac{C(1+z) - x'}{-C'} = u.$$

L'équation devient

$$(33)\qquad z = e^{ra+u} - 1 = F(\varepsilon, z).$$

(¹) Dans cette formule, lire ξ au lieu de ζ.

Considérons z comme une variable complexe et ε comme une variable réelle et positive. Si ε tend vers zéro, C tend vers a. On peut donc choisir ε_0 assez petit pour que $\varepsilon < \varepsilon_0$ entraîne

$$|C - a| < \rho < a - x.$$

Soit maintenant R compris entre zéro et $\frac{a - x - \rho}{a + \rho}$. Si $|z| \leq R$, on a

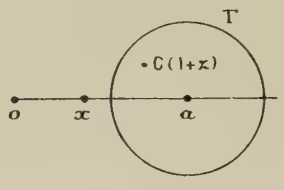
$$|Cz| < R(a + \rho) < a - x - \rho;$$

d'où

$$|C(1 + z) - a| \leq |Cz| + |C - a| < R(a + \rho) + \rho < a - x.$$

Le point $C(1 + z)$ reste donc intérieur à un cercle Γ, de centre a et auquel le point x est extérieur. On en conclut que u est fonction holomorphe de z pour $|z| < R$. Il en est donc de même de $F(\varepsilon, z)$.

Fig. 3.



Cherchons une limite supérieure m de $|F|$, pour $|z| = R$. On démontre facilement (1) que si $|z| < r$, on a

$$|e^z - 1| < \sqrt{2}\, r e^r.$$

Donc, si u' est une limite supérieure de $|u|$, on peut prendre

$$m = \sqrt{2}\, r^2 u' e^{r+u'}.$$

D'autre part, $\log|C(1 + z) - x|$ a un module borné supérieurement par un nombre fixe, d'après ce qui précède. Enfin (n° 9), $\log(-C') = O(-\log\varepsilon)$. Donc, $u' = O(-\log\varepsilon)$ et $m = O(-\varepsilon^2 \log\varepsilon)$. Si ε_0 a été choisi assez petit, on a $m < R$ et l'on peut appliquer la *formule de Lagrange* à l'équation (33).

---

(1) Soit $z = x + iy$ et $\rho = |e^z - 1|$. On a

$$\rho^2 = (e^x - 1)^2 + 4 e^x \sin^2\frac{y}{2} < (e^x - 1)^2 + y^2 e^x < (e^x - 1)^2 + r^2 e^r.$$

Or, si $-r < x < r$, $e^x - 1$ est compris entre $e^r - 1$ et $e^{-r} - 1$. Comme $1 - e^{-r} < e^r - 1$, on a

$$|e^x - 1| < e^r - 1.$$

Mais $e^r - 1 < r e^r$, car la fonction $e^r - 1 - r e^r$ a une dérivée négative et s'annule pour $r = 0$. On peut donc écrire

$$\rho^2 < r^2 e^{2r} + r^2 e^r < 2 r^2 e^{2r}.$$

Si $H(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z| \leq R$, la valeur que prend cette fonction quand on y remplace z par la racine de (33) est

$$H(z) = H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[H'(z) F^n(\varepsilon, z) \right]_{z=0}. \tag{34}$$

Si l'on arrête cette série au terme de rang n, le reste R_n a un module borné supérieurement par (1) $M\left(\frac{m}{R}\right)^n \frac{m + R m'}{R - m}$, où M et m' désignent respectivement des limites supérieures de $|H(z)|$ et de $\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|$ pour $|z| = R$. Or,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^{t^2 u} \frac{t^2 C}{C(1+z) - x}.$$

On en conclut que $m' = O(\varepsilon^2)$. Donc,

$$|R_n| < O(-\varepsilon^2 \log \varepsilon)^{n+1}.$$

Nous pouvons ensuite développer chacun des termes conservés dans (34) jusqu'à l'ordre de ε^{2n} inclus. *Nous obtenons ainsi un développement asymptotique de* $H(z)$.

17. Appliquons ceci à $rt = \log(1+z)$, en prenant $R < 1$ et $n = 2$. Nous avons

$$rt = F(\varepsilon, 0) + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{F^2(\varepsilon, z)}{1+z} \right]_{z=0} + \dots,$$

soit

$$rt = e^{t^2 u_0} - 1 + \frac{1}{2}(e^{t^2 u_0} - 1)\left(1 - e^{t^2 u_0} + 2\frac{t^2 C}{C - x} e^{t^2 u_0}\right) + \dots$$

en posant

$$u_0 = \log \frac{C - x}{-C}.$$

Puis,

$$t = r u_0 \left(1 + \frac{r^2 C}{C - x}\right) + \dots$$

ou, en utilisant (18) et remplaçant C par a,

$$t = -\frac{\varepsilon k u_0}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 k^2}{4} \frac{2a - x}{a - x}\right) + \dots \tag{35}$$

Calculons c. On peut écrire

$$c = C(r - r')(1+z) + r'x = (x - C)r' + Cr + Cz(r - r'). \tag{36}$$

(1) Cela résulte facilement de la démonstration d'Hermite (*Cf.* GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 129).

Calculons donc le développement de z

$$z = F_0 + F_0 e^{r^2 u_0} \frac{r^2 C}{C - x} + \ldots = r^2 u_0 \left(1 + \frac{r^2 u_0}{2} + \frac{r^2 a}{a - x} \right) + \ldots$$

Portant dans (36), on obtient

$$v = (x - C) r' + C r + C r u_0 \left(-1 - \frac{r^2 u_0}{2} - \frac{r^2 a}{a - x} + r^2 \right) + \ldots$$

ou, en utilisant (18) et négligeant les termes d'ordre > 4,

$$(37) \quad k \varepsilon v = 2(C - x) + \frac{\varepsilon^2 k^2}{2} (x - 2C + C u_0) + \frac{\varepsilon^4 k^4}{8} \left(x^2 - 2a + \frac{a^2 u_0}{a - x} + \frac{a u_0^2}{2} \right) + \ldots$$

Or, la formule (2_1) nous donne

$$D = b - \lambda - \varepsilon v = \frac{2(a - x)}{k} - \varepsilon v.$$

D'où

$$(38) \quad kD = 2(a - C) + \frac{\varepsilon^2 k^2}{2} (-x + 2C - C u_0) + \frac{\varepsilon^4 k^4}{8} \left(-x + 2a + \frac{a^2 u_0}{x - a} - \frac{a u_0^2}{2} \right) + \ldots$$

18. Il nous reste à calculer C et u_0 en fonction des données utilisées au n° 15. D'après (28_1), on a

$$z = -\frac{2D}{ak\varepsilon^2}, \qquad z_0 = \frac{2v_0}{ak\varepsilon} = Z_0 + \zeta;$$

d'où

$$v_0 = \frac{ak\varepsilon}{2} (Z_0 + \zeta).$$

Portant dans (20), il vient

$$C = \frac{a}{1 - r^2} \left[1 - \frac{rk\varepsilon}{2} (Z_0 + \zeta) \right].$$

D'autre part, on a, d'après (38_1),

$$(39) \qquad \theta = \frac{a}{4} \varepsilon^2 k^2.$$

Moyennant quoi on peut écrire, d'après (18),

$$\frac{rk\varepsilon}{2} = -\frac{\theta}{a} \left(1 + \frac{\theta}{a} + \ldots \right), \qquad r^2 = \frac{\theta}{a} \left(1 + 2\frac{\theta}{a} + \ldots \right).$$

Dès lors, on a, au sixième ordre près,

$$C = a + \theta \left(m + \frac{2m + 1}{a} \theta + \zeta \right) + \ldots$$

On a ensuite, au quatrième ordre près,

$$u_0 = \log \frac{C - a + \xi}{C - a} = \log \frac{\xi + \theta m}{\left(m + \frac{2m + 1}{a} \theta + \zeta \right)} = \log \frac{\xi}{\theta m} + \frac{\theta m}{\xi} - \frac{2m + 1}{ma} \theta - \frac{\zeta}{m} - \ldots$$

Portant dans (38) et (35) et tenant compte de (39), on vérifie facilement *l'exactitude des formules* (28) *à* (31).

19. *Arc de première espèce ayant un point frontière à gauche.* — C'est le cas examiné au n° 10.

Aux n^{os} 65$_1$ à 67$_1$, nous avons calculé la déviation et le temps correspondant au point frontière de gauche. Comme on l'a vu, les formules sont très compliquées et nous ne les expliciterons pas.

On peut retrouver directement ces formules en posant

$$e^{rt} = 1 - \alpha z, \qquad \alpha = a - C, \qquad u = \log \frac{C'}{\alpha(1 + Cz)}, \qquad \varphi(z) = z - \frac{r^2 u}{\alpha},$$

$$H(z) = \frac{1 - e^{-r^2 u} - r^2 u}{\alpha}$$

et résolvant l'équation

$$\varphi(z) = H(z)$$

par la méthode des approximations successives, au moyen de la suite définie par

$$\varphi(z_n) = H(z_{n-1}), \qquad z_0 = -\frac{k}{k_1 a_1},$$

k_1 et a_1 se rapportant au point frontière de droite. On peut démontrer que cette suite est uniformément convergente, si ε est assez petit. La rapidité de la convergence est celle d'une progression géométrique dont la raison est de l'ordre de $\frac{-\varepsilon^2}{\log \varepsilon}$. Nous ne ferons pas les calculs, qui sont compliqués.

Par contre, on peut remarquer que les calculs sont plus simples, si l'on cherche *la déviation et le temps au delà du point frontière de gauche*, puisqu'on peut appliquer les formules (22) et (23). En revenant au cas général, il doit être possible d'établir des formules asymptotiques donnant cette déviation et ce temps, et ces formules sont vraisemblablement plus simples que celles des n^{os} 65$_1$ à 67$_1$. Mais, en raison du faible intérêt pratique de ce cas particulier, nous n'examinerons pas plus profondément cette question, qui paraît difficile.

20. *Arc supérieur.* — Voyons d'abord ce que donnent les formules des n^{os} 50$_1$ et 51$_1$. On a

$$A_0 = \frac{2}{k}, \qquad 0 = \frac{a}{4} \varepsilon^2 k^2.$$

Tant que la pente de (Γ) *est* A_0, on a

$$\lambda = b - A_0 \xi, \qquad N = \xi.$$

Les fonctions P, P$_1$, P$_2$, Q, Q$_1$, Q$_2$ ont la même expression qu'au n° 15. Les

formules (123_1), (125_1), (128_1) et (130_1) donnent ensuite

$$(40)\quad \begin{cases} D_1 = \log\frac{\xi}{\theta} - \frac{\xi}{a}, & D_2 = \dfrac{1+\log\frac{\xi}{\theta}}{\xi} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\log^2\frac{\xi}{\theta} + \log\frac{\xi}{\theta} - 3 - \frac{\xi}{a}\right), \\ aT_1 = \log\frac{\xi}{\theta}, & aT_2 = \dfrac{1+\log\frac{\xi}{\theta}}{\xi} + \frac{1}{a}\left(\log\frac{\xi}{\theta} - 3\right). \end{cases}$$

Et l'on a enfin

$$(41)\qquad D = A_0\theta(D_1 + \theta D_2 + \dots), \qquad \varepsilon t = A_0\theta(T_1 + \theta T_2 + \dots).$$

Lorsque la pente de (Γ) *change*, l'expression de X devient une fonction linéaire de ξ. On peut encore calculer les six fonctions P, P_1, ..., Q_2, par des intégrations élémentaires, mais fastidieuses. Nous nous contenterons d'expliciter les calculs sur l'exemple concret du n° 22. Pour l'instant, bornons-nous à contrôler les formules (40) et (41) par le *calcul direct*.

21. Les résultats obtenus aux n^{os} 16 et 17 s'appliquent sans modification et l'on peut, en particulier, utiliser les formules (35) et (37), en changeant seulement les signes de D et t. Mais, on a cette fois

$$C = \frac{a}{1-r^2} = a(1 + r^2 + r^4 + \dots) = a + \theta\left(1 + 3\frac{\theta}{a} + \dots\right),$$

$$C' = a - C = -\theta\left(1 + 3\frac{\theta}{a} + \dots\right);$$

$$u_0 = \log\frac{\xi + \theta + \dots}{\theta\left(1 + 3\frac{\theta}{a} + \dots\right)} = \log\frac{\xi}{\theta} + \frac{\theta}{\xi} - \frac{3\theta}{a} + \dots.$$

En portant dans (35) et (37) et laissant tomber les termes d'ordre > 4, on retrouve bien les formules (41) et (40).

22. *Exemple concret.* — Prenons la courbe fondamentale ci-contre (*fig.* 3).

Écrivons d'abord les formules asymptotiques. Les formules (26) et (27) deviennent

$$u = x\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 + \dots),$$

$$\varepsilon t = \log\frac{3}{x} + \varepsilon^2\left(1 + \log\frac{x}{3}\right) + \varepsilon^4\left(\frac{3}{2} + \log\frac{x}{3}\right) + \dots$$

En particulier, pour $x = 1$, on a

$$(42)\qquad u_1 = \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 + \dots),$$

$$(43)\qquad \varepsilon t_1 = \log 3 + \varepsilon^2(1 - \log 3) + \varepsilon^4(1{,}5 - \log 3) + \dots.$$

On a ensuite (n° 18)

$$Z_0 + \zeta = \frac{u_1}{\varepsilon^2} = 1 + \varepsilon^2 + \dots.$$

Donc,

$$Z_0 = 1, \quad \zeta = \varepsilon^2 + \ldots, \quad m = Z_0 + 1 = 2.$$

Puis, d'après (39), $\theta = \varepsilon^2$.

Les formules (28) deviennent

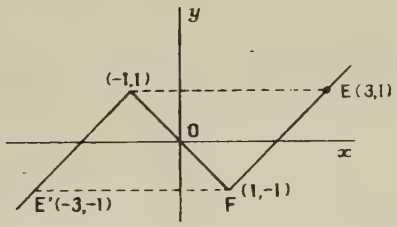
$$D_{00} = 1 - \xi + \log\frac{\xi}{2\varepsilon^2}, \qquad D_{01} = \frac{1}{2},$$

$$D_{10} = \frac{2}{\xi} - \frac{5}{2} - \xi + \left(2 + \frac{1}{\xi}\right)\log\frac{\xi}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\log^2\frac{\xi}{2\varepsilon^2}.$$

En particulier, pour $\xi = 1$,

$$D_{00} = -\log(2\varepsilon^2); \qquad D_{01} = 0{,}5; \qquad D_{10} = -1{,}5 - 3\log(2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\log^2(2\varepsilon^2).$$

Fig. 3.



En portant dans (29), on a la *déviation au sommet inférieur*

$$(44) \qquad D_{S'} = -\varepsilon^2\log(2\varepsilon^2) + \varepsilon^4\left[-1 - 3\log(2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\log^2(2\varepsilon^2)\right] + \ldots.$$

Les formules (30) deviennent

$$T_{00} = \log\frac{\xi}{2\varepsilon^2}, \qquad T_{01} = -\frac{1}{2}, \qquad T_{10} = \frac{1+\xi}{\xi}\log\frac{\xi}{2\varepsilon^2} + \frac{2}{\xi} - \frac{5}{2}.$$

En y faisant $\xi = 1$ et portant dans (31), on obtient le *temps de parcours t_2 de l'arc de première espèce*

$$(45) \qquad t_2 = -\varepsilon\log(2\varepsilon^2) - \varepsilon^3[1 + 2\log(2\varepsilon^2)] + \ldots.$$

23. Occupons-nous maintenant de *l'arc supérieur*. Commençons par calculer les valeurs des six fonctions P, P_1, ..., Q_2 pour $x = 0$.

Pour $x = 1$, on a (n° 15)

$$P = \frac{2}{3}, \qquad P_1 = -\frac{2}{9}, \qquad P_2 = Q = Q_1 = Q_2 = 0.$$

Pour $0 < x < 1$, on a $\lambda = -x$; d'où $X = 1 - \lambda = 1 + x = 4 - \xi$. Nous avons d'abord, entre 2 et $\xi > 2$:

$$P = \frac{2}{3} + \int_2^{\xi}\left[\frac{1}{\xi} - \frac{3-\xi}{3(4-\xi)}\right]d\xi = 2\frac{2-\log 2}{3} - \frac{\xi}{3} + \log\xi - \frac{1}{3}\log(4-\xi).$$

Pour $\xi = 3$,

$$P = \frac{1 - 2\log 2}{3} + \log 3.$$

On a maintenant

$$P_1 = -\frac{2}{9} + \int_2^3 \left\{ \frac{(3-\xi)[4 - 2\log 2 - \xi - \log(4-\xi)]}{9(4-\xi)^2} + \frac{\log\xi}{\xi^2} - \frac{1 - \log\xi}{3\xi} \right\} d\xi$$

ou, par un calcul facile,

$$P_1 = \frac{1 + 7\log 2 - \log^2 2}{9} - \frac{2}{3}\log 3 - \frac{1}{6}\log^2 3.$$

Puis

$$P_2 = \int_2^3 \left[\frac{3-\xi}{3(4-\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{3\xi} \right] d\xi = \frac{\log 3 - 1}{3};$$

$$Q = \int_2^3 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4-\xi} \right) d\xi = \log 3 - 2\log 2;$$

$$Q_1 = \int_2^3 \left[\frac{4 - 2\log 2 - \xi - \log(4-\xi)}{3(4-\xi)^2} + \frac{\log\xi}{\xi^2} - \frac{1}{3\xi} \right] d\xi = \log 2 - \frac{2}{3}\log 3;$$

$$Q_2 = \int_2^3 \left[\frac{1}{(4-\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} \right] d\xi = \frac{1}{3}.$$

On a maintenant, par les formules (123_1), (125_1), (128_1) et (130_1), où l'on doit faire $\theta = 3\varepsilon^2$, $\xi = 3$, $s = \frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$(46) \quad \begin{cases} 3D_1 = -6\log\varepsilon - 3P = 2\log 2 - 1 - 3\log 3 - 6\log\varepsilon, \\ 9D_2 = -6 - 12\log\varepsilon + 6\log^2\varepsilon + 9P_1 + 9P_2(\log 3 + 2\log 2), \\ 9D_2 = -5 + 7\log 2 - \log^2 2 - 9\log 3 + 1{,}5\log^2 3 + 6\log\varepsilon(\log 3 - 3) + 6\log^2\varepsilon, \\ 3T_1 = 2\log 2 - \log 3 - 2\log\varepsilon, \\ 9T_2 = -2 - 4\log\varepsilon + 3Q_1 + 3Q_2(\log 3 + 2\log\varepsilon), \\ 9T_2 = -2 + 3\log 2 - \log 3 - 2\log\varepsilon. \end{cases}$$

En faisant $A_0 = 1$ et $\theta = 3\varepsilon^2$ dans (41), on obtient la *déviation au sommet supérieur* et le *temps de parcours de l'arc supérieur :*

$$D_S = 3D_1\varepsilon^2 + 9D_2\varepsilon^4 + \dots$$
$$t_S = 3T_1\varepsilon + 9T_2\varepsilon^3 + \dots$$

24. Voyons maintenant ce que donne le *calcul direct.*

Les valeurs de r et r' sont opposées dans les deux phases du mouvement. Celles qui se rapportent à la deuxième phase sont positives et valent

$$r = \varepsilon(1 + \varepsilon^2 + \dots), \qquad r' = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4 + \dots).$$

Au départ du point terminal, nous avons

$$x = C(e^{-rt} - r^2 e^{-r't}), \qquad C = \frac{3}{1 - r^2}.$$

Calculons le temps t_1 et la vitesse v_1 pour $x=1$. A cet effet, nous pouvons appliquer la méthode exposée aux n^{os} 16 et 17. La formule (35) nous donne d'abord

$$t_1 = -\varepsilon u_0\left(1+\frac{5}{2}\varepsilon^2+\dots\right)$$

avec

$$u_0 = \log\frac{C-1}{C-3} = \log\frac{2}{3r^2}+\frac{r^2}{2}+\dots = \log\frac{2}{3\varepsilon^2}-\frac{3}{2}\varepsilon^2+\dots.$$

D'où

$$-t_1 = \varepsilon(\log 2-\log 3-2\log\varepsilon)+\frac{\varepsilon^3}{2}(5\log 2-5\log 3-10\log\varepsilon-3)+\dots.$$

La formule (37) nous donne ensuite, en changeant les signes de r et r',

$$-rv_1 = 1-C+Cr^2-Cr^2u_0\left(1+\frac{r^2}{2}+\frac{r^2u_0}{2}\right)+\dots$$
$$= -2-3r^2u_0\left(1+\frac{3}{2}r^2+\frac{r^2u_0}{2}\right)+\dots$$

ou, en posant provisoirement $\alpha = \log\frac{2}{3r^2}$,

$$rv_1 = 2+3r^2\alpha+\frac{3r^4}{2}(3\alpha+\alpha^2+1)\dots.$$

A partir de $x=1$, nous avons la formule (19), avec

$$C = \frac{1-rv_1}{1-r^2}, \qquad C' = \frac{rv_1-r^2}{1-r^2}.$$

Le temps t_2 correspondant à $x=0$ est donné par

$$e^{r'-rt_2} = -\frac{C}{C'} = \frac{rv_1-1}{rv_1-r^2}.$$

D'où

$$t_2 = \frac{r}{1-r^2}\log\frac{rv_1-1}{rv_1-r^2} = r(1+r^2)\log\frac{1+3r^2\alpha\dots}{2+r^2(3\alpha-1)-\dots}$$
$$= -r\log 2+r^3\left(-\log 2+\frac{1+3\alpha}{2}\right)+\dots;$$
$$-t_2 = \varepsilon\log 2-\varepsilon^3\left(\frac{1-\log 2-3\log 3}{2}-3\log\varepsilon\right)+\dots.$$

Le *temps de parcours total de l'arc supérieur* est

$$(47)\qquad -t_1-t_2 = \varepsilon(2\log 2-\log 3-2\log\varepsilon)+\varepsilon^3(-2+3\log 2-\log 3-2\log\varepsilon)+\dots.$$

Il est *entièrement conforme* à ce qu'on a obtenu au n° 22.

25. La vitesse pour $x=0$ est

$$v_2 = Ce^{rt_2}(r-r') = r'(rv_1-1)e^{rt_2} = r'(rv_1-1)\left(1+rt_2+\frac{r^2t_2^2}{2}+\dots\right).$$

$$v_2 = r'\left[1+3r^2\alpha+\frac{3}{2}r^4(1+3\alpha+\alpha^2)\right]\left[1-r^2\log 2+r^4\left(\frac{1+3\alpha}{2}-\log 2+\frac{1}{2}\log^2 2\right)\right]+\dots.$$

En remplaçant r par son développement et α par $\log 2 - \log 3 - 2\log\varepsilon - 2\varepsilon^2$, la *déviation au sommet supérieur* $D_s = \varepsilon v_2 - 1$ nous est donnée finalement par

$$(48)\qquad D_s = \varepsilon^2(2\log 2 - 3\log 3 - 1 - 6\log\varepsilon) + \varepsilon^4\Big(-5 + 7\log 2 - 9\log 3 - \log^2 2 + \frac{3}{2}\log^2 3 - 18\log\varepsilon + 6\log 3\log\varepsilon + 6\log^2\varepsilon\Big) + \dots,$$

ce qui est *entièrement d'accord* avec les formules du n° 22.

26. *Calcul de l'amplitude et de la période de l'oscillation périodique.* — Appliquons d'abord la formule (158_1). Nous avons (n° 68_1)

$$F(a) = 3D_1, \qquad F'(a) = -2\log\varepsilon - 1,$$

car l'intégrale I est nulle, puisque $B = b_0 = 0$. Puis $G(a) = 9D_2$. La formule (158_1) devient, en remarquant que $D_s = D_{s'}$ par suite de la symétrie de la courbe fondamentale

$$(49)\qquad z = D_{s'} - D_s + \varepsilon^2(1 + 2\log\varepsilon)(D_{s'} - 3\varepsilon^2 D_1) + \dots$$

ou, en tenant compte de (44), (46) et (48),

$$(50)\qquad z = \varepsilon^2\Big(1 + 3\log\frac{3}{2} + 4\log\varepsilon\Big) + \varepsilon^4(5 - 13\log 2 + 12\log 3 + 1{,}5\log^2 2 - 1{,}5\log^2 3 + 18\log\varepsilon - 4\log 2\log\varepsilon + 4\log^2\varepsilon) + \dots.$$

Les formules (160_1) nous donnent maintenant

$$\varepsilon f'(a) = \frac{1+\varepsilon^2}{3} + \dots, \qquad \varepsilon f''(a) = -\frac{1}{9}.$$

Portant dans (161_1), on a

$$(51)\qquad T = T_0 + z\,\frac{1+\varepsilon^2}{3\varepsilon} - \frac{z^2}{18\varepsilon} + \dots.$$

En tenant compte de (43), (45) et (47), on trouve d'autre part

$$T_0 = \frac{\log 3}{\varepsilon} + \varepsilon(1 + \log 2 - 2\log 3 - 4\log\varepsilon) + \varepsilon^3\Big(-\frac{3}{2} + \log 2 - 2\log 3 - 6\log\varepsilon\Big) \dots.$$

Portant dans les formules ci-dessus, il vient, tous calculs faits,

$$(52)\qquad T = \frac{\log 3}{\varepsilon} + \varepsilon\Big(\frac{4 - 10\log\varepsilon}{3} - \log 3\Big) + \varepsilon^3\Big(\frac{4}{9} - 4\log 2 + 3\log 3 - \log 3\log 6 - \frac{2}{9}\log\varepsilon - \frac{2}{3}\log 6\log\varepsilon - \frac{2}{9}\log^2\varepsilon\Big) + \dots.$$

27. *Comparaisons numériques.* — Nous allons maintenant comparer les résultats numériques donnés par les formules asymptotiques et par le calcul direct, pour les valeurs suivantes de ε :

$$0{,}2; \quad 0{,}1; \quad 0{,}05; \quad 0{,}02.$$

Le temps t_1 correspondant à $x = 1$ est obtenu en résolvant l'équation (19) pour $x = 1$. A cet effet, posons $e^{rt} = u$. L'équation devient

$$u + \frac{C'}{C} u^{\frac{r'}{r}} = \frac{1}{C}, \tag{53}$$

laquelle se résout par substitutions successives et par la méthode de Newton. On a ensuite

$$v_1 = r' + Cu(r - r'), \qquad t_1 = r' \log u.$$

Rappelons que

$$C = \frac{3}{1 - r^2}, \qquad C' = \frac{-3r^2}{1 - r^2}, \qquad C(r - r') = -\frac{3}{r}.$$

Le temps t_2, correspondant au passage de $x = 1$ à $x = 0$, est ensuite donné par (n° 24)

$$t_2 = \frac{r}{1 - r^2} \log \frac{rv_1 - 1}{rv_1 - r^2} = \frac{1}{r' - r} \log \frac{v_1 - r'}{v_1 - r}.$$

La vitesse correspondant à $x = 0$ est (n° 25)

$$v_2 = r'(rv_1 - 1) e^{r't_2} = (v_1 - r') e^{r't_2}.$$

On a ensuite

$$D_S = \varepsilon v_2 - 1, \qquad D_{S'} = -1 - \varepsilon v_2.$$

Bien entendu, t_1, v_1, t_2, v_2 doivent être calculés séparément pour l'arc supérieur et pour l'arc inférieur.

Voici les résultats que nous ont donnés ces calculs :

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
D_S exact	0,31840	0,114243	0,038161	0,0082460
D_S asymp	0,31020	0,113997	0,038158	0,0082455
Erreur	0,00820	0,000246	0,000003	0,0000005
Erreur relative	0,026	0,0022	0,00008	0,00006
$D_{S'}$ exact	0,11972	0,041049	0,013431	0,0028597
$D_{S'}$ asymp	0,11665	0,040959	0,013427	0,0028597
Erreur	0,00307	0,000090	0,000004	»
Erreur relative	0,026	0,0024	0,0003	»
t_S exact	0,738877	0,493281	0,314600	0,162285
t_S asymp	0,71891	0,492871	0,314579	0,162289
Erreur	0,01986	0,000410	0,000021	—0,000004
Erreur relative	0,027	0,00083	0,000067	—0,000025
$t_{S'}$ exact	5,4774	10,976	21,968	54,930
$t_{S'}$ asymp	5,4765	10,9766	21,9674	54,9305
Erreur	0,0009	»	»	»
Erreur relative	0,00016	»	»	»
Temps total exact	6,2162	11,469	22,283	55,092
Temps total asymp	6,1954	11,469	22,281	55,093
Erreur	0,0208	»	»	»
Erreur relative	0,0034	»	»	»

Comme on le voit, *la vérification est excellente.*

28. Les formules (49) et (51) donnent, dans l'ordre ci-dessus,

z	$-0,180$	$-0,0706$	$-0,0244$	$-0,00537$
$T-T_0$	$-0,362$	$-0,241$	$-0,164$	$-0,089$
T	5,833	11,228	22,117	55,004

On peut contrôler ces derniers résultats de la manière suivante :

D'après les formules (20), les accroissements de C et C′ correspondant à l'accroissement z de x_0 sont

$$\Delta C = \frac{z}{1-r^2}, \qquad \Delta C' = \frac{-r^2 z}{1-r^2}.$$

En différentiant l'équation (19) pour $x=1$, on a

$$\varphi_1 \Delta t_1 + \frac{z}{1-r^2}(e^{rt_1} - r^2 e^{rt_1}) = 0;$$

d'où

$$\Delta t_1 = \frac{z(r^2 e^{rt_1} - e^{rt_1})}{(1-r^2)\varphi_1} = -\frac{z}{3\varphi_1}, \tag{54}$$

en tenant compte des formules du n° 27.

On a ensuite

$$\Delta\varphi_1 = x_1'' \Delta t_1 + \frac{zr}{1-r^2}(e^{rt_1} - e^{rt_1}) = x_1'' \Delta t_1 + \frac{z\varphi_1}{3}.$$

Or, de l'équation différentielle du n° 7, on tire, en faisant $x=1$ et $k=2$

$$x_1'' = -1 - \frac{\varphi_1}{\varepsilon}.$$

Donc

$$\Delta\varphi_1 = -\Delta t_1\left(1 + \frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right) + \frac{z\varphi_1}{3} = \frac{z}{3}\left(\varphi_1 + \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{55}$$

On a maintenant (n° 24)

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta\varphi_1}{r'-r}\left(\frac{1}{\varphi_1 - r'} - \frac{1}{\varphi_1 - r}\right) = \frac{\Delta\varphi_1}{(\varphi_1 - r)(\varphi_1 - r')}. \tag{56}$$

Puis (n° 25)

$$\frac{\Delta\varphi_2}{\varphi_2} = \frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1 - r'} + r\,\Delta t_2. \tag{57}$$

Enfin

$$\Delta D_S = \varepsilon\,\Delta\varphi_2, \qquad \Delta D_{S'} = -\varepsilon\,\Delta\varphi_2.$$

D'où l'on déduit les nouvelles valeurs de D_S et $D_{S'}$, qui doivent être égales, si l'on a bien affaire au cycle.

Enfin, en ajoutant les Δt_1 et Δt_2 correspondant aux arcs supérieur et inférieur on obtient l'accroissement ΔT de la demi-période.

Voici les résultats numériques, transcrits toujours dans le même ordre :

Δt_1 (sup.).....	0,0052	0,00111	0,0002	0,000018
Δt_1 (inf.).....	—0,288	—0,2325	—0,1626	—0,0895
Δv_1 (sup.).....	—0,9978	—0,733	—0,495	—0,269
Δt_2 (sup.).....	—0,0131	—0,00311	—0,000585	—0,0000532
Δv_2 (sup.).....	—0,993	—0,732	—0,494	—0,269
ΔD_S.....	—0,1996	—0,0732	—0,0247	—0,00538
ΔT.....	—0,2959	—0,2345	—0,1630	—0,0896

Pour l'arc inférieur, Δv_1, Δt_2 et Δv_2, donc ΔD_S sont inférieurs à l'approximation des calculs, conformément au principe de l'accumulation des trajectoires (n° 15$_1$).

Voici maintenant les valeurs de $D_S - D_{S'}$, calculées au moyen des résultats du n° 27 :

$D_S - D_{S'}$.....	0,19355	0,07304	0,02473	0,005386

Leurs différences avec les valeurs de $-\Delta D_S$ sont donc

$$0{,}0060;\quad 0{,}0002$$

et inférieures à l'approximation des calculs.

Voici de même les valeurs de $T - T_0$ et leurs différences avec ΔT :

$T - T_0$.....	—0,362	—0,241	—0,164	—0,089
Erreurs.....	0,066	0,006	0,001	»
Erreurs relatives.....	0,0113	0,0005	0,00005	$< 0{,}00002$

Comme on le voit, *la précision de nos formules asymptotiques est excellente*.

CHAPITRE III.

EXEMPLE DE M. VAN DER POL.

29. *Calcul des formules asymptotiques.* — Dans cet exemple, on a

$$\lambda = -x + \frac{x^3}{3}. \tag{58}$$

Le *point frontière* F de première espèce, correspondant au minimum de λ, a pour coordonnées $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$. Le *point terminal* E a pour coordonnées $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

30. *Arc supérieur.* — En posant $x = 2 - \xi$, l'équation (58) devient

$$\lambda = \frac{2}{3} - 3\xi\left(1 - \frac{2}{3}\xi + \frac{\xi^2}{9}\right).$$

Donc (n^o 7_1)

$$a=2, \qquad A_0=3, \qquad B=-\frac{2}{3}+\frac{\xi}{9}, \qquad b_0=-\frac{2}{3}, \qquad b_1=\frac{1}{9}.$$

D'où (n^o 21_1)

$$\theta=\frac{2}{9}\varepsilon^2.$$

Puis (n^o 50_1)

$$\alpha_0=-\frac{1}{6}, \qquad \alpha_1=-\frac{5}{6}, \qquad \alpha_2=-\frac{3}{2}; \qquad X=\frac{\xi}{9}(\xi-3)^2;$$

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\frac{2\xi-3}{(\xi-3)^2}d\xi=\log\frac{3-\xi}{3}-\frac{\xi}{2(\xi-3)}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\xi-3=u$ et $-\frac{u}{3}=\rho$; on a

$$P=\log\rho-\frac{\xi}{2u}.$$

Les formules (126_1), (127_1), (129_1) et (131_1) donnent ensuite, tous calculs faits,

$$P_1=-\frac{5}{12}\log^2\rho+\left(-\frac{1}{\xi}+\frac{5}{6}\log\xi-\frac{13}{36}-\frac{3}{2u}+\frac{3}{4u^2}+\frac{3}{2u^3}\right)\log\rho$$
$$+\left(\frac{19}{36}+\frac{3}{2u}-\frac{3}{4u^2}-\frac{3}{2u^3}\right)\log\xi-\frac{349}{432}-\frac{25}{12u}+\frac{7}{8u^2}-\frac{1}{u^3}-\frac{27}{16u^4},$$

$$P_2=-\frac{5}{6}\log\rho-\frac{19}{36}-\frac{3}{2u}+\frac{3}{4u^2}+\frac{3}{2u^3},$$

$$Q=\log\rho+\frac{\xi}{u},$$

$$Q_1=-\frac{2}{3}\log^2\rho+\left(-\frac{1}{\xi}+\frac{4}{3}\log\xi-\frac{23}{18}-\frac{3}{u}+\frac{3}{u^2}-\frac{3}{u^3}\right)\log\rho$$
$$+\left(\frac{13}{9}+\frac{3}{u}-\frac{3}{u^2}+\frac{3}{u^3}\right)\log\xi-\frac{515}{216}-\frac{29}{6u}+\frac{11}{4u^2}-\frac{5}{2u^3}+\frac{27}{8u^4},$$

$$Q_2=-\frac{3}{4}\log\rho-\frac{13}{9}-\frac{3}{u}+\frac{3}{u^2}-\frac{3}{u^3}.$$

Pour $x=0$, on a

$$P=1-\log 3, \qquad P_1=-\frac{5}{12}\log^2 3-\frac{5}{6}\log 2\log 3+\frac{\log 3-2\log 2}{9}+\frac{79}{54},$$

$$P_2=\frac{2}{9}+\frac{5}{6}\log 3; \qquad Q=-2-\log 3,$$

$$Q_1=-\frac{2}{3}\log^2 3-\frac{4}{3}\log 2\log 3-\frac{65\log 3+68\log 2}{9}+\frac{254}{27},$$

$$Q_2=\frac{68}{9}+\frac{4}{3}\log 3.$$

Les formules (123_1), (125_1), (128_1) et (130_1) nous donnent maintenant, pour $x=0$,

$$D_1=3\log 3-1-2\log\varepsilon=2,29584-2\log\varepsilon,$$

$$D_2=\frac{241}{54}+\frac{\log 3}{3}-\frac{15}{4}\log^2 3-\frac{2}{9}\log\varepsilon+5\log 3\log\varepsilon-\frac{5}{3}\log^2\varepsilon,$$

$$D_3=0,3031+5,2708\log\varepsilon-\frac{5}{3}\log^2\varepsilon,$$

$$T_1=1+\frac{3}{2}\log 3-\log\varepsilon=2,64792-\log\varepsilon,$$

$$T_2=\frac{335}{54}-\frac{65}{6}\log 3-3\log^2 3+\frac{65}{9}\log\varepsilon+4\log 3\log\varepsilon-\frac{4}{3}\log^2\varepsilon,$$

$$T_3=-9,3187+11,617\log\varepsilon-\frac{4}{3}\log^2\varepsilon.$$

On a enfin

$$D_S=\frac{2}{3}D_1\varepsilon^2+\frac{4}{27}D_2\varepsilon^4+\dots, \tag{59}$$

$$t_S=\frac{2}{3}T_1\varepsilon+\frac{4}{27}T_2\varepsilon^3+\dots. \tag{60}$$

31. *Arc de seconde espèce.* — Nous posons cette fois $x=1+\xi$; d'où

$$\lambda=-\frac{2}{3}+\xi^2\left(1+\frac{\xi}{3}\right).$$

Donc, pour le point F, on a

$$a=1,\qquad b=-\frac{2}{3},\qquad r=2,\qquad A_0=1,\qquad B=\frac{1}{3},\qquad b_0=\frac{1}{3},\qquad b_1=0.$$

La formule (14) devient

$$D_F=1,01890\theta^2+0,187\theta^3-0,031\theta^4+\dots. \tag{61}$$

L'intégrale N_1 de la formule (15) vaut (n° 53_1)

$$N_1=\int_2^1\left[\frac{1}{x(x^2-1)}-\frac{1}{2(x-1)}\right]dx=\frac{3\log 2-\log 3}{2}=0,4904.$$

Nous avons alors

$$J=\theta^3\left(\frac{\log\theta}{2}-0,163\right)-0,5\theta^4+\dots.$$

La formule (38_1) nous donne, d'autre part,

$$\theta=\varepsilon^{\frac{2}{3}}. \tag{62}$$

Le *temps de parcours de l'arc total* est enfin donné par (26_1) :

$$\varepsilon t=-\int_2^1\frac{x^2-1}{x}dx+D+J=\frac{3}{2}-\log 2+D+J.$$

soit, en tenant compte des formules précédentes,

$$\varepsilon t_F = 0,806853 + 1,01890\,\theta^2 + \theta^3\left(\frac{\log\varepsilon}{3} + 0,024\right) - 0,531\,\theta^5 + \dots \tag{63}$$

32. *Arc de première espèce.* — Nous avons d'abord, en tenant compte de (61),

$$z_0 = \frac{D_0}{\theta^2} = 1,01890 + 0,187\,\theta - 0,031\,\theta^2 + \dots;$$

d'où

$$Z_0 = 1,01890, \qquad \xi = \theta(0,187 - 0,031\,\theta + \dots).$$

La formule (114_1) devient, en négligeant les puissances de θ supérieures à la quatrième,

$$\begin{aligned} D = {} & \theta^2 D_{00} + \theta^3(D_{10} + 0,187\,D_{01}) \\ & + \theta^4(-0,031\,D_{01} + D_{20} + 0,187\,D_{11} + 0,035\,D_{02}) + \dots \end{aligned} \tag{64}$$

Appliquons maintenant les formules du n° 59_1. En changeant ξ en $-\xi$, B devient $-\frac{1}{3}$; donc

$$b_0 = -\frac{1}{3}, \qquad b_1 = 0, \qquad \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

Au n° 4, nous avons vu que $H = 2,33810$ et, au n° 6, nous avons donné les valeurs des intégrales n_i. Enfin, on a, pour $\xi = 1$,

$$P_2 = \int_0^1 \left[3\,\frac{1-\xi}{\xi^2(3-\xi)} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{3\xi}\right] d\xi = \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}.$$

D'où

$$D_{00} = 2,33810; \qquad D_{10} = \frac{4}{9}\log\varepsilon - 1,210; \qquad D_{01} = 0,595;$$

$$D_{20} = 0,635; \qquad D_{11} = 0,1112; \qquad D_{02} = 0,1607.$$

Portant dans (64), on a enfin

$$D_S = 2,33810\,\theta^2 - \theta^3\left(1,099 - \frac{4}{9}\log\varepsilon\right) + 0,643\,\theta^4 + \dots \tag{65}$$

33. En opérant sur εt comme sur D, on obtient une formule analogue à (64), les D_{ij} étant simplement remplacés par les T_{ij}. Appliquons maintenant les formules du n° 60_1. On a d'abord

$$Q_2 = \int_0^1 \left[\frac{3}{\xi^2(3-\xi)} - \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{3\xi}\right] d\xi = \frac{1}{3}\log\frac{3}{2}.$$

Puis

$$T_{00} = 1,31920; \qquad T_{10} = -\frac{2}{9}\log\varepsilon - 1,074; \qquad T_{01} = -0,405;$$

$$T_{20} = -0,380; \qquad T_{11} = -0,1083; \qquad T_{02} = 0,1607.$$

D'où

$$\varepsilon t_S = 1,319200^2 - 0^2\left(1,150 + \frac{2}{9}\log\varepsilon\right) - 0,38200^3 + \dots$$

34. Voici les résultats numériques donnés par ces diverses formules pour $\varepsilon = 0,2$; $0,1$; $0,05$; $0,02$:

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
D_S	0,14410	0,05700	0,013784	0,0026975
t_S	0,53033	0,32364	0,187083	0,0873767
D_F	0,12623	0,049096	0,0192252	0,0056053
t_F	4,3726	8,3955	16,4298	40,5809
t'_F	0,45706	0,38715	0,323302	0,25019
D_S	0,20968	0,08868	0,037209	0,011576
t_S	0,5869	0,54026	0,45919	0,35191

Le temps t'_F est le temps t_F diminué du terme principal $\frac{-1}{\varepsilon}\int\frac{dx}{x}$.

35. *Calcul direct de l'arc supérieur; méthode des arcs successifs.* — Partant du point (x, y), donnons à x l'accroissement négatif $-h$ et cherchons l'accroissement k que subit y. On pourrait le calculer par la formule de Taylor. Il est un peu plus simple, en vue des calculs numériques, de procéder comme il suit.

Intégrons l'équation (5_1) par rapport à x entre x et $x-h$:

$$k^2 + 2ky + \varepsilon^2 h(h - 2x) = 2\int_{y}^{y-k} \lambda\, dy. \tag{67}$$

Dans le second membre, remplaçons λ par la moyenne arithmétique λ_m de ses valeurs pour x et $x-h$. Notre second membre devient $2k\lambda_m$. L'équation (67) est alors une équation de second degré en k, dont nous prenons la racine positive. En posant $A = y - \lambda_m$, on a, avec une *erreur de l'ordre de* h^3,

$$k = -A + \sqrt{A^2 + \varepsilon^2 h(2x - h)} = \frac{\varepsilon^2 h(2x-h)}{A + \sqrt{\ }}. \tag{68}$$

Posons

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2 h(x_0 + x_1)}{2A},$$

x_0 et x_1 désignant les abscisses des deux extrémités de l'arc. En développant par la série du binome, on a, avec la même approximation,

$$k = \alpha - \frac{\alpha^2}{2A}. \tag{69}$$

Calculons maintenant la *partie principale de l'erreur* Δk imputable à la formule (68). Différentions (67) :

$$y\,\Delta k = \lambda_m \Delta k + \int_{y}^{y+k} (\lambda - \lambda_m)\, dy.$$

Prenons la diminution t de x à partir du début de l'arc pour variable d'intégration; il vient, en ne gardant que les termes en h^3,

$$\Lambda\,\Delta k = \int_0^h \left(-\lambda' t + \frac{\lambda''}{2}t^2 + \frac{\lambda' h}{2} - \frac{\lambda''}{4}h^2\right)(y' - y'' t)\,dt = \frac{\lambda' y'' - y'\lambda''}{12}\,h^3$$

ou, en tenant compte de (5_1),

$$\Delta k = -\frac{y' h^3}{12\Lambda}\left(\frac{x^2+1}{x} + \lambda'\frac{y' - \lambda'}{\Lambda}\right) \tag{70}$$

ou encore, en négligeant le quatrième ordre en h,

$$\Delta k = \frac{k}{12\Lambda}\left(h^2\frac{x^2+1}{x} + \Delta\lambda\frac{k - \Delta\lambda}{\Lambda}\right). \tag{71}$$

Cette dernière formule permet de calculer pratiquement Δk. En ajoutant à (68), on obtient k avec une *erreur du quatrième ordre*. On peut alors prendre des arcs assez grands. Mais l'expérience m'a montré qu'on allait plus vite en prenant des arcs plus petits, calculés par des formules plus simples. Je m'en suis donc tenu à la formule (69), en m'imposant la condition que l'erreur Δk soit inférieure à $2\varepsilon^2 . 10^{-4}$. Cette règle *détermine le fractionnement de la trajectoire*.

A cet effet, utilisons la formule (70), en remarquant que, pour les valeurs de ε précédemment adoptées et *si l'on n'est pas très près du point terminal*, on peut négliger y' devant λ' et remplacer A par

$$\frac{2}{3} - \lambda = \frac{(x+1)^2(2-x)}{3}.$$

Moyennant quoi la formule (70) devient

$$-\Delta k = \frac{\varepsilon^2 h^3}{12\Lambda^3}\left[x\lambda'^2 - \Lambda(x^2+1)\right].$$

Comme le crochet s'annule pour une certaine valeur de x, j'ai changé le signe du second terme, pour éviter d'être conduit à prendre des arcs trop grands et j'ai obtenu la condition

$$\left(\frac{10h}{2-x}\right)^3 < \frac{2}{15}\,\frac{(x+1)^4}{1 + x(x-1)^2}$$

ou, en remarquant que la racine cubique de $\frac{2}{15}$ vaut à peu près 0,5,

$$h < \frac{(2-x)(x+1)}{20}\sqrt[3]{\frac{x+1}{1+x(x-1)^2}} = \varphi(x).$$

Cela m'a conduit à fractionner par dixièmes entre $x = 0$ et $x = 1$ et $x = 1,4$; puis à prendre les valeurs suivantes pour abscisses des points séparateurs :

1,48; 1,56; 1,62; 1,68; 1,73; 1,77; 1,80; 1,83; 1,86; 1,88; 1,90.

Pour $x > 1,9$, il faut, dans la formule (70), remplacer A par $y - \lambda$ et non par $\frac{2}{3} - \lambda$. En remplaçant x par 2, λ' par 3 et y' par $-\frac{2\varepsilon^2}{A}$, on a approximativement (1)

$$-\Delta k = \frac{3}{2}\varepsilon^2\left(\frac{h}{A}\right)^3;$$

ce qui donne la condition

$$h < \frac{A}{20}.$$

Bien entendu, le fractionnement ne peut plus être arrêté à l'avance, car il dépend de ε. Au surplus, *notre méthode de calcul ne convient plus au départ du point terminal.*

36. *Départ du point terminal.* — Utilisons la méthode du n° 19. L'équation (29_1) s'écrit, dans le cas présent,

$$\frac{ds}{dz} = \frac{z + s + \theta s^2\left(-\frac{2}{3} + \frac{\theta s}{9}\right)}{1 - \frac{\theta s}{2}}.$$

Au lieu de calculer z en fonction de s, calculons s en fonction de z. Posons $s = ue^z$; l'équation devient

$$\frac{du}{dz} = \frac{ze^{-z} - \frac{\theta u^2}{6}e^z + \frac{\theta^2 u^3}{9}e^{2z}}{1 - \frac{\theta u}{2}e^z} = f(z, u, \theta). \tag{72}$$

Appliquons à cette équation la méthode de la Note (A), en prenant

$$\psi(z) = \sigma k z e^{-z}, \qquad \sigma = \pm 1, \qquad \sigma z > 0;$$

k désignant un facteur positif indéterminé. Supposons $|\theta| < R$ et imposons la condition

$$\frac{R\psi}{2}e^z = \frac{Rkz\sigma}{2} < k' < 1. \tag{73}$$

Nous avons

$$|I| < \frac{1}{1 - k'}\int_0^z e^{-z}\left(z + \sigma\frac{Rk^2}{6}z^2 + \frac{R^2k^3}{9}z^3\right)dz.$$

Or, on a l'identité

$$\int_0^z e^{-z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n)\,dz = e^{-z}\left[\sum_{p=0}^{n} p!\,a_p\varphi_p(z)\right],$$

(1) On suppose A assez grand pour que $\frac{2\varepsilon^2}{A}$ soit négligeable devant 3, mais assez petit pour que $\frac{5}{3}$ soit négligeable devant $\frac{9}{A}$.

en posant (¹)

$$\varphi_p(z) = e^z - \sum_{i=0}^{p} \frac{z^i}{i!}.$$

Dès lors, l'inégalité (4) de la Note (A) est vérifiée si l'on

$$\varphi_1 - \sigma \frac{Rk^2}{3}\varphi_2 + \frac{2R^2k^3}{3}\varphi_3 < \sigma k(1-k')z. \tag{74}$$

Un calcul analogue montre que l'inégalité (7_A) est entraînée par

$$\frac{R^2k^2}{12}\varphi_1 + \sigma R\left(1+\frac{2k}{3}\right)\varphi_2 + 2R^2k^2\varphi_3 - \frac{8}{3}\sigma R^3k^3\varphi_4 < \sigma h(1-k')^2 z. \tag{75}$$

Pour $\theta' < R$, la fonction s peut être développée suivant les puissances de θ, si l'on peut déterminer k, $k' < 1$ et $h < 1$ vérifiant (73), (74) et (75).

Si l'on se donne R et k, il est possible de trouver k' et h satisfaisant à ces inégalités, pourvu que (74) et (75) soient vérifiées pour $k' = \frac{Rk\sigma z}{2}$ et $h = 1$; ce qui donne, en posant $Rk = p$ et ordonnant par rapport à k,

$$k(\sigma z - A) > \varphi_1, \qquad k(\sigma z - B) > \sigma p \varphi_2. \tag{76}$$

avec

$$\begin{cases} A = p\left(\sigma\dfrac{\varphi_2}{3} - \dfrac{z^2}{2}\right) - \dfrac{2}{3}\varphi_3 p^2, \\ B = p\left(\dfrac{2}{3}\sigma\varphi_2 + z^2\right) + p^2\left(\dfrac{\varphi_1}{12} + 2\varphi_3 - \sigma\dfrac{z^3}{4}\right) - \dfrac{8}{3}\sigma\varphi_4 p^3. \end{cases} \tag{77}$$

On obtient une infinité de valeurs possibles pour R en choisissant arbitrairement p tel que $\sigma z > A$ et B et prenant k au moins égal à la plus grande des deux fractions $\frac{\varphi_1}{\sigma z - A}$ et $\frac{\sigma p \varphi_2}{\sigma z - B}$. Reste à voir quelle est la solution la plus avantageuse.

Supposons qu'on pousse le développement de s jusqu'au terme en θ^n. L'erreur commise a un module inférieur à

$$E_s = \frac{\varphi_n(z)}{1-\frac{\theta}{R}}\frac{\theta^{n-1}}{R^{n-1}} = \sigma z e^z \frac{k^{n-2}}{p^{n-1}\left(1-\theta\frac{k}{p}\right)}\theta^{n-1}.$$

L'erreur sur ξ a un module inférieur à θE_s. Enfin, si l'on appelle m la valeur absolue de la pente de la trajectoire, l'erreur sur y a un module inférieur à $E_y = m\theta E_s$. Or,

$$\frac{dy}{d\xi} = \lambda_0 \frac{dz}{ds} = \frac{3}{e^z - 1}$$

(¹) Signalons l'identité $\varphi_p'(z) = \varphi_{p-1}(z)$; d'où résultent les inégalités $\sigma\varphi_{2n} > 0$, $\varphi_{2n-1} > 0$, quel que soit z.

approximativement, si θ est assez petit. Comme $e^z - 1$ a le signe de z, donc de σ, on a

$$E_1 = \frac{3ze^{-z}}{e^z - 1} \frac{k^{n-2}}{p^{n-1}\left(1 - \theta\frac{k}{p}\right)} \theta^{n-2}. \tag{78}$$

Pour des valeurs données de z et θ, il faut donc chercher à rendre minimum le dernier facteur ou, si $\theta\frac{k}{p}$ est petit vis-à-vis de l'unité, la fonction $P = \frac{k^{n-2}}{p^{n-1}}$. D'abord, p étant donné, on doit choisir k le plus petit possible, donc égal à la plus grande des fractions $\frac{\varphi_1}{\sigma z - A}$ et $\frac{\sigma p \varphi_2}{\sigma z - B}$.

37. Supposons maintenant $z > 0$, ce qui est le cas pour l'arc supérieur. On a $\sigma = +1$.

Quand p est petit, c'est la première des deux fractions ci-dessus qui convient et le calcul numérique montre qu'il en est de même dans la presque totalité de l'intervalle pour lequel A et B sont $< z$. Dès lors, nous prenons $k = \frac{\varphi_1}{z - A}$ et nous annulons ensuite la dérivée de P, ce qui nous donne l'équation

$$(n-2)p\frac{dA}{dp} - (n+1)(z - A) = 0.$$

Pratiquement, nous prenons $n = 2$, comme on le verra plus loin. L'équation ci-dessus devient, tous calculs faits et en posant, pour simplifier l'écriture, $A = ap + bp^2$,

$$11bp^2 + 7ap - 3z = 0. \tag{79}$$

La racine positive de cette équation est la valeur *optimum* de p. On en déduit

$$k = \frac{11\varphi_1}{4(2z - ap)}.$$

En portant dans (78), on a *la meilleure limitation de l'erreur sur* y. On doit toutefois prendre la précaution de vérifier que, pour la valeur de p ainsi calculée, on a bien

$$\frac{\varphi_1}{z - A} > \frac{p\varphi_2}{z - B}.$$

38. *Lorsque z est grand*, on peut simplifier les calculs, moyennant quelques approximations. On peut d'abord remplacer tous les φ_i par e^z. L'équation (79) se réduit à

$$33p^2 + 7p - 9ze^{-z} = 0.$$

D'où l'on tire approximativement

$$p = \frac{9}{7} ze^{-z}.$$

Puis, $k = \frac{ze^z}{4z}$ et (¹)

$$P = \frac{k^4}{p^3} = 4{,}44\left(\frac{e^z}{z}\right)^3. \tag{80}$$

39. Imposons-nous, comme au n° 35, la condition $E_3 < 2\varepsilon^2 . 10^{-4}$. Elle est remplie si l'on a

$$\frac{ze^{-z}}{e^z - 1} \frac{P}{1 - \frac{2k}{9p}\varepsilon^2} < 273 . 10^{-4}\varepsilon^{-6}. \tag{81}$$

Elle est vérifiée pour les valeurs suivantes de z :

ε	0,2	0,1	0,05	0,02
z	2	2,8	4	5,6
p	0,276	0,157	0,0709	0,0231
k	3,74	7,68	21,15	81,1
Premier membre de (81)	417	11100	$9{,}2.10^5$	$3{,}91.10^8$
Second membre	427	27300	$17{,}5.10^5$	$4{,}27.10^8$

40. Calculons maintenant les *trois premiers termes du développement*

$$s = s_0 + \theta s_1 + \theta^2 s_2 + \dots$$

En substituant dans l'équation du n° 36 et développant le second membre suivant les puissances de θ, puis identifiant, on obtient

$$s'_0 = s_0 + z, \qquad s'_1 = s_1 + \frac{zs_0}{2} - \frac{s_0^2}{6}, \qquad s'_2 = s_2 + \frac{zs_1}{2} - \frac{s_0 s_1}{3} + \frac{z}{4}s_0^2 + \frac{s_0^3}{36};$$

de plus, tous les s_i doivent s'annuler avec z. Un calcul élémentaire donne

$$s_0 = e^z - 1 - z, \qquad s_1 = -\frac{e^{2z}}{6} + \frac{e^z}{12}(-26 + 4z + 5z^2) + \frac{14 + 13z + 4z^2}{6},$$

$$s_2 = \frac{e^{3z}}{24} + \frac{e^{2z}}{36}(14 + 7z - 5z^2) + e^z\left(\frac{305}{24} - \frac{17}{12}z - \frac{11}{8}z^2 - \frac{2}{27}z^3 + \frac{25}{288}z^4\right)$$
$$- \frac{1}{36}(473 + 446z + 172z^2 + 28z^3).$$

Pour les valeurs précédentes de z, on trouve

z	2.	2,8.	4.	5,6.
s_0	4,389058	12,64465	49,59816	263,8264
s_1	1,465	2	—156,7	—8693
s_2	3,8	68,4	3580	622000

(¹) La valeur asymptotique de $\frac{pz_2}{2 - B}$ est 9; elle est bien inférieure à la valeur précédente de k.

On en déduit les valeurs suivantes de $\xi = 0s$, sous lesquelles on a écrit les valeurs de x et de $y = \frac{2}{3} + 30z$:

ε	0,2.	0,1.	0,05	0,02.
ζ	0,0391323	0,0281099	0,0275068	0,0233830
x	1,9608677	1,9718901	1,9724932	1,9766170
y	0,72	0,685333	0,673333	0,668160

41. Les points ci-dessus calculés ont servi de points de départ pour la méthode des arcs successifs. La première valeur de h a été évaluée en utilisant la formule (70) pour le calcul de Δk; la valeur de A étant obtenue par la formule $A = \frac{\varepsilon^2 x}{-y'}$. On a d'ailleurs $-y' = 3\frac{dz}{ds}$; comme une grande précision n'est pas nécessaire, on peut se contenter de remplacer $\frac{dz}{ds}$ par la première approximation $\frac{1}{e^z - 1}$, ce qui donne

$-y'$	0,470	0,191	0,0559	0,01114
A	0,167	0,102	0,0881	0,0709
h	0,0083	0,0052	0,0045	0,0037

Les abscisses choisies pour la fin du premier arc sont les suivantes :

x	1,95	1,966	1,968	1,973

Les points de séparation des arcs suivants ont été déterminés en utilisant la règle donnée à la fin du n° 35. Le nombre total des arcs calculés est de 31, 34, 35 et 36, pour les quatre valeurs de ε.

Rappelons que la répercussion de l'erreur commise sur chaque point va en s'atténuant quand on se rapproche de Oy (n° 6$_1$).

Cette méthode de calcul m'a donné les valeurs suivantes pour la *déviation* D_s *au sommet supérieur :*

D_s	0,14430	0,045694	0,013784	0,00269755

42. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours de chaque arc est donné, *au troisième ordre près*, par la formule

$$\varepsilon \Delta t = \frac{2k}{x_0 + x_1}.$$

Pour l'arc commençant au point terminal, nous prenons la formule

$$\varepsilon t = \int_0^z \frac{30\,dz}{2 - 0s} = \frac{30}{2}\int_0^z \left(1 + \frac{0s}{2} + \frac{0^2 s^2}{4} + \dots\right) dz$$

$$= \frac{30}{2}\int_0^z \left| 1 + \frac{0}{2}s_0 + \frac{0^2}{4}(2s_1 + s_0^2) + \dots \right] dz.$$

En remplaçant s_0 et s_1 par les expressions du n° 40, on trouve, tous calculs faits (¹),

$$\varepsilon t = \frac{3\theta}{2} z + \frac{3}{4}\theta^2\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}\right) + \frac{\theta^3}{16}\left[-e^{2z} + e^z(-20 - 18z + 5z^2) + 21 + 34z + 19z^2 + \frac{14}{3}z^3\right] + \dots$$

En remplaçant z par ses différentes valeurs, on obtient

t	0,13433	0,093665	0,066916	0,037405

En ajoutant les valeurs déduites du calcul par arcs, on obtient le *temps de parcours total de l'arc supérieur*

t_s	0,53610	0,32403	0,187218	0,087381

43. *Arc de seconde espèce; départ du point terminal.* — Au départ du point terminal, nous appliquons la méthode des n°s 36 à 40. Mais, cette fois, $z < 0$, $\sigma = -1$.

La valeur *optimum* de p se détermine comme au n° 37. Pour z très grand, on a asymptotiquement

$$pz = -0,561; \qquad k = 1,69\,\frac{z+1}{z}; \qquad P = 46,2\,\frac{(z+1)^4}{-z}.$$

L'inégalité (81) est vérifiée pour les valeurs suivantes de z :

z	0,2	0,1	0,05	0,02
z	−2	−3,3	−5	−8
p	0,349	0,200	0,1262	0,070
k	0,975	1,210	1,365	
Premier membre de (81)	364	24800	$1,29.10^6$	$3,30.10^8$
Second membre	427	27300	$1,75.10^6$	$4,27.10^8$

En portant dans les formules du n° 40, on trouve les valeurs ci-après de s_0, s_1, s_2; d'où résultent les valeurs de ξ, x, y et $u = \lambda - y$:

s_0	1,1363353	2,336882	4,006738	7,000335
s_1	0,5058	2,4899	8,2110	27,674
s_2	0,368	4,271	27,46	178.1
ξ	0,01013213	0,00520542	0,00222850	0,000622471
x	1,98986787	1,99479458	1,99777150	1,999377529
y	0,6133333	0,6446667	0,6583333	0,6622667
u	0,0231418	0,00643787	0,00165775	0,000266695

44. Il est intéressant maintenant de comparer ces valeurs de u avec celles que donne la formule asymptotique (23_1). En posant

$$(82) \qquad u = \varepsilon^2 R_1 + \varepsilon^4 R_2 + \varepsilon^6 R_3 + \dots$$

(¹) On peut pousser le développement jusqu'au terme en θ^4. Mais il est négligeable par rapport à l'approximation du calcul par arcs, ainsi que je l'ai vérifié numériquement.

on trouve

$$R_1 = \frac{x}{\lambda'}, \qquad \lambda' = x^2 - 1;$$

$$R_2 = \frac{\lambda' - x\lambda''}{\lambda'^2} = -\frac{x(x^2+1)}{\lambda'^2};$$

$$R_3 = x\frac{x^2(5\lambda''^2 - \lambda'\lambda''') - 7x\lambda'\lambda'' + 2\lambda'^2}{\lambda'^3} = 2x\frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{\lambda'^3}.$$

Ceci donne les valeurs suivantes de u :

u asymp.....	0,0269	0,006683	0,001672	0,0002667 80
Différences.....	0,0038	0,000235	0,000014	0,00000085

La concordance avec les valeurs résultant du calcul direct est médiocre, pour les plus grandes valeurs de ε. Mais ceci tient à ce que l'on est *trop près du point terminal*. Nous avons vu (n° 14_1) que la formule asymtotique n'est applicable qu'à une distance de ce point d'un ordre < 2 par rapport à ε. Autrement dit, ξ devrait être quelque peu supérieur à ε^2, ce qui n'est précisément pas le cas, surtout pour $\varepsilon = 0,2$ et $0,1$.

On pourrait évidemment augmenter ξ en adoptant de plus grandes valeurs pour z. Mais on ne pourrait pas répondre de l'approximation du calcul direct.

45. *Suite de l'arc.* — Partant des points ci-dessus calculés, nous appliquons la méthode du n° 35. La première valeur de h se calcule comme au n° 41, au moyen de la formule (70), dans laquelle on remplace y' par $\frac{\varepsilon^2 x}{u}$ et A par $-u$. On trouve

$$h..... \quad 0,0022 \qquad 0,00098 \qquad 0,00045 \qquad 0,00020.$$

Quand on est *assez éloigné des points frontière* pour que la formule asymptotique (23_1) soit applicable, la formule (70) prend la forme très simple

$$\Delta k = \frac{x^2+2}{3\lambda'} h^3. \tag{82}$$

Le minimum de cette quantité est $\frac{2}{3}h^3$. Si l'on s'impose toujours la condition $\Delta k < 2\varepsilon^2 . 10^{-4}$, on trouve que h devrait être au plus égal aux valeurs ci-dessous :

$$0,0229; \quad 0,0144; \quad 0,00909; \quad 0,00493.$$

En admettant qu'on puisse adopter ces valeurs de $x = 2$ à $x = 1$, les nombres d'arcs à calculer seraient 44, 70, 110 et 203. En réalité, ils seraient encore augmentés par la diminution nécessaire de h au voisinage des points frontière. On voit que les singularités analytiques présentées par l'équation différentielle le long d'un arc de seconde espèce se retrouvent dans le calcul numérique, qui est *beaucoup plus pénible que sur les arcs de première espèce*.

Dans ces conditions, j'ai adopté la marche suivante. J'ai fait complètement le calcul par arcs pour $\varepsilon = 0,2$. J'ai dû calculer 59 arcs, la valeur de h allant de

0,003 au début à 0,02 à la fin. Voici, à titre de renseignement, quelques valeurs de u et les valeurs correspondantes obtenues par la série asymptotique :

x	1,989868.	1,95.	1,90.	1,8.	1,7.
u	0,023142	0,027562	0,028826	0,031691	0,035236
u_{as}	0,0269	0,027602	0,028835	0,031700	0,035258
x	1,6	1,5.	1,4.	1,3.	
u	0,039726	0,045556	0,053318	0,063890	
u_{as}	0,039813	0,045994	0,05633	0,09485	

Comme le prévoit la théorie (n^{os} 14_1 et 16_1), la série asymptotique cesse d'être valable au voisinage des points frontière. Elle donne une bonne approximation entre $x = 1,9$ et $x = 1,7$.

Pour $\varepsilon = 0,1$ et 0,05, j'ai fait le calcul par arcs au début et à la fin et utilisé la série asymptotique dans la partie centrale. Pour $\varepsilon = 0,02$, j'ai fait le calcul par arcs à la fin seulement, la formule (23_1) étant suffisamment exacte à partir du point calculé au n° 44.

La question se pose toutefois de savoir comment doit être délimitée la région dans laquelle on peut utiliser la série asymptotique. Au départ du point terminal, il suffit de poursuivre le calcul par arcs jusqu'au moment où la valeur de u se raccorde suffisamment avec la valeur asymptotique. Je me suis arrêté aux valeurs suivantes de x, au-dessous desquelles sont inscrites les deux valeurs de u :

ε	0,1.	0,05.
x	1,98.	1,9968.
u direct	0,006766	0,0016702
u asymptotique	0,006767	8,0016703

Mais quand on approche de $x = 1$, où faut-il reprendre le calcul par arcs ? Je me suis imposé la condition que le dernier terme $\varepsilon^6 R_3$ utilisé dans la formule asymptotique soit inférieur à $2\varepsilon^2 . 10^{-3}$; j'ai obtenu les valeurs suivantes de x : 1,9; 1,50; 1,35; 1,2. Le rapport du dernier terme calculé au précédent prend alors les valeurs : 0,060; 0,093; 0,070 et 0,061. On peut donc espérer que le premier terme négligé est de l'ordre du dixième du dernier terme calculé, donc $< 2\varepsilon^2 . 10^{-4}$.

46. En ce qui concerne la conduite du calcul de chaque arc, il est *préférable de calculer directement u au lieu de y*, parce que son accroissement est plus petit. On a $\Delta u = \Delta\lambda - \Delta y$. D'autre part $A = y - \lambda_m$ étant négatif, on doit remplacer la formule (68) par

$$\Delta y = -A - \sqrt{A^2 + \varepsilon^2 h(2x - h)}.$$

Donc,

$$u = \frac{\Delta\lambda}{2} - u + \sqrt{\left(u - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2 + 2u\,\Delta\lambda + \varepsilon^2 h(2x - h)}.$$

Posons

$$\alpha = 2u - \Delta\lambda, \qquad \beta = 2u\,\Delta\lambda + \varepsilon^2 h(x_0 + x_1).$$

Nous pouvons écrire

$$k = \Delta u = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^3} + \dots \tag{83}$$

ou

$$k = \frac{2\beta}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}. \tag{84}$$

La formule (71) s'écrit d'autre part

$$\Delta k = -\frac{\varepsilon^2 h}{12 u^2}\left[h^2(x^2+1) + x\,\Delta\lambda\,\frac{\Delta u}{u}\right].$$

Elle se prête aisément au calcul numérique et permet de faire sur chaque arc la correction de la partie principale de l'erreur. J'ai opéré ainsi pour $\varepsilon = 0{,}05$ et $0{,}02$, afin de diminuer le nombre des arcs. Dans chacun de ces cas, j'ai utilisé, bien entendu, la formule (84) et non la formule (83).

Observons enfin que l'erreur sur chaque arc n'a qu'une très faible répercussion sur les arcs suivants, en vertu du principe de l'accumulation des trajectoires (n° 15_1). J'ai eu l'occasion de le vérifier expérimentalement, en rectifiant quelques erreurs accidentelles, découvertes tardivement. J'ai constaté qu'au bout de deux ou trois arcs la valeur de u corrigée rejoignait la valeur erronée précédemment obtenue.

Voici les valeurs obtenues pour la *déviation au point frontière* :

$D_F \dots\dots\dots$, 0,126136 0,049080 0,0192324 0,00560053.

46. *Calcul du temps.* — Employons la formule (27_1), en laissant tomber le terme principal $-\int \frac{dx}{x}$. Le temps de parcours de l'arc total est donné par

$$\varepsilon t = u_F + J, \qquad J = \int_2^1 \frac{u}{x^2}\,dx. \tag{85}$$

Pour calculer l'intégrale J, nous la partageons en trois parties, correspondant aux trois méthodes de calcul de la trajectoire.

La première J_1 correspond à l'arc issu du point terminal. Elle s'écrit

$$J_1 = \int_2^{x} \frac{\lambda - \frac{2}{3}}{x^2}\,dx + \frac{3}{4}\theta^2 \int_0^z \frac{z\,ds}{\left(1 - \frac{\theta s}{2}\right)^2}.$$

Le premier terme vaut

$$\frac{x^2-4}{6} - \log\frac{x}{2} + \frac{2-x}{3x} = \frac{3}{8}z^2 + \frac{z^3}{12} + \dots$$

La seconde intégrale s'écrit (n° 36), en laissant tomber les termes en θ^2 :

$$\int_0^z z\left[z + s_0 + \theta\left(s_1 + \frac{5}{6}s_0^2 + \frac{3}{2}zs_0\right) + \dots\right] dz.$$

En remplaçant s_0 et s_1 par les valeurs trouvées au n° 40, un calcul élémentaire donne $a + b\theta$, en posant

$$a = e^z(z-1) + 1 - \frac{z^2}{2},$$

$$b = \frac{e^{2z}}{6}(2z-1) + \frac{e^z}{12}(36 - 36z + 3z^2 + 5z^3) - \frac{17}{6} + \frac{19}{12}z^2 + \frac{7}{9}z^3.$$

D'où

$$J_1 = \frac{3}{8}z^2 + \frac{\xi^3}{12} + \frac{3}{4}\theta^2(a + b\theta) \dots$$

Dans les coefficients a et b, z doit être remplacé par les valeurs adoptées au n° 43. Quant à ξ, on doit le remplacer par les valeurs trouvées au n° 43. On trouve ainsi les valeurs numériques ci-dessous :

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
J_1	—0,0000446	—0,0^{5}676	—0,0^{6}814	—0,0^{7}385.

47. L'intégrale J_2 correspondant au calcul par arcs successifs a été évaluée par la méthode de Simpson, sauf pour les arcs, en très petit nombre, pour lesquels h changeait d'un arc au suivant et pour lesquels j'ai employé la méthode des trapèzes. Voici les résultats numériques :

J_2	—0,032776	—0,0086357	—0,00239378	—0,000416682.

48. Enfin, l'intégrale J_3 correspondant au calcul par la série asymptotique s'écrit

$$J_3 = \varepsilon^2 S_1 + \varepsilon^4 S_2 + \varepsilon^6 S_3 + \dots$$

avec

$$S_1 = \int \frac{R_1}{x^2}\,dx = \int \frac{d\lambda'}{2\lambda'(\lambda'+1)} = \frac{1}{2}(\log\lambda' - 2\log x),$$

$$S_2 = \int \frac{R_2}{x^2}\,dx = -\int \frac{\lambda'+2}{2(\lambda'+1)\lambda'^4}\,d\lambda' = S_1 + \frac{1}{2\lambda'} - \frac{1}{4\lambda'^2} + \frac{1}{3\lambda'^3},$$

$$S_3 = \int \frac{R_3}{x^2}\,dx = \int \frac{3\lambda'^2 + 12\lambda' + 10}{(\lambda'+1)\lambda'^7}\,d\lambda' = 2S_2 - \frac{1}{3\lambda'^3} - \frac{1}{4\lambda'^4} - \frac{2}{5\lambda'^5} - \frac{5}{3\lambda'^6}.$$

Bien entendu, ces intégrales doivent être prises entre les bornes qui conviennent. Voici leurs valeurs numériques, ainsi que celles de J, εt et t :

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
J_3	0	—0,001455	—0,0006313	—0,000179029
J	—0,032821	—0,010098	—0,0030259	—0,00059575o
εt	0,093315	0,038982	0,0162065	0,0050095
t	0,46658	0,38982	0,324130	0,250480

49. *Arc de première espèce.* — Il se calcule entièrement par la méthode du n° 35. Pour $\varepsilon = 0,2$ et 0,1, j'ai employé la formule (69), sans faire la correction (71); le nombre des arcs a été 23 et 22. Dans les deux autres cas,

j'ai utilisé la formule (68) et fait la correction (71); le nombre des arcs a été 21 et 27.

Pour le calcul du temps, j'ai appliqué la méthode exposée au début du n° 42, pour $\varepsilon = 0,2$ et $0,1$. Dans les deux autres cas, j'ai utilisé la formule

$$t = -\varepsilon \int \frac{dx}{u},$$

en évaluant cette intégrale par la méthode de Simpson, afin que l'erreur soit, par rapport à h, du même ordre que l'erreur commise dans le calcul de y.

Voici les résultats :

$D_{S'}$	0,20818	0,08846	0,037232	0,0115786
$t_{S'}$	0,62125	0,54530	0,46061 3	0,352238

50. *Contrôle des formules asymptotiques.* — Le tableau ci-dessous rapproche les résultats numériques donnés par les deux méthodes de calcul, les lettres accentuées se rapportant au calcul par les formules asymptotiques. Au-dessous, sont indiquées les erreurs absolues et les erreurs relatives. Le temps t_F ne comprend pas le terme principal (*cf.* n° 34). Par contre, j'ai donné les valeurs T et T′ du *temps total*, avec les erreurs correspondantes.

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
D_S	0,14430	0,045694	0,013784	0,00269755
D'_S	0,14410	0,045700	0,013784	0,00269755
Er. abs	0.00020	—0,000006	0	0
Er. rel	0,0014	—0,00017	0	0
t_S	0,5361	0,32403	0,18722	0,087381
t'_S	0,5303	0,32364	0,18708	0,087377
Er. abs	0,0058	0,00039	0,00014	0,000004
Er. ret	0,011	0,0012	0,00075	0,00005
D_F	0,12614	0,049080	0,019232	0,0056053
D'_F	0,12623	0,049096	0,019225	0,0056053
Er. abs	—0,00009	—0,000016	0,000007	0
Er. rel	—0,0007	—0,00033	0,0004	0
t_F	0,4666	0,38982	0,32413	0,25048
t'_F	0,4571	0,38715	0,32302	0,25019
Er. abs	0,0095	0,00267	0,00111	0,00029
Er. rel	0,02	0,007	0,0034	0,0012
$D_{S'}$	0,20818	0,08846	0,037232	0,0115786
$D'_{S'}$	0,20968	0,08868	0,037209	0,0115769
Er. abs	—0,0015	—0,00022	+0,000023	0,0000017
Er. rel	—0,007	—0,0025	0,00062	0,00015
$t_{S'}$	0,6213	0,5453	0,46061	0,35224
$t'_{S'}$	0,5869	0,5403	0,45919	0,35191
Er. abs	0,0344	0,0050	0,00142	0,00033
Er. rel	0,055	0,0092	0,0031	0,00094
T	5,9966	9,6547	17,4018	41,2710
T′	5,9469	9,6466	17,3991	41,2703
Er. abs	0,0497	0,0081	0,0027	0,0007
Er. rel	0,0083	0,00084	0,00016	0,000017

On voit que l'accord est *excellent pour l'arc supérieur* (¹) mais *moins bon pour l'arc inférieur*. Ceci n'est pas surprenant, puisque les formules asymptotiques donnant la déviation comportent une erreur du sixième ordre en ε dans le premier cas et seulement d'ordre $\frac{10}{3}$ dans le second cas; de même, celles qui donnent t comporte une erreur d'ordre 5 ou $\frac{8}{3}$ suivant le cas.

Enfin, l'accord est toujours *moins bon pour le temps que pour la déviation;* cela s'explique également, puisque l'erreur est d'un ordre infinitésimal moindre. Toutefois si l'on envisage le *temps total*, l'approximation redevient *excellente*.

Bien entendu, je ne garantis pas la parfaite exactitude de tous ces calculs numériques. Ils contiennent très vraisemblablement des erreurs accidentelles. Mais, dans leur ensemble, les résultats obtenus montrent que *nos formules asymptotiques donnent une approximation très satisfaisante*.

51. *Calcul de l'amplitude et de la période de l'oscillation périodique.* — Supposons toujours la courbe (Γ) symétrique par rapport à l'origine. Dans les formules (159_1), nous devons remplacer D_s par $D_{s'}$ et il vient

$$z = D_{s'} - \frac{2}{3} D_1 \varepsilon^2 - \frac{2}{3} D_{s'}^3,$$

D_1 et $D_{s'}$ étant donnés par les formules du n° 30. Pour les quatre valeurs de ε, on trouve les valeurs suivantes de z :

$$0,03331; \quad 0,03743; \quad 0,02247; \quad 0,008789.$$

Les formules (161_1) et (160_1) donnent

$$T - T_0 = \frac{3z}{2\varepsilon} + \frac{5z^2}{8\varepsilon};$$

d'où les valeurs numériques suivantes (²) :

$$0,2533; \quad 0,5703; \quad 0,6805; \quad 0,6616.$$

52. Pour faire la *vérification directe*, il nous faut calculer l'accroissement Δy subi par y quand l'abscisse a du point terminal augmente de z. Considérant y comme une fonction des deux variables indépendantes x et a, nous avons

$$\Delta y = z \frac{dy}{da} + \frac{z^2}{2} \frac{d^2 y}{da^2} + \dots$$

(¹) La coïncidence parfaite dans les cas $\varepsilon = 0,05$ et $0,02$ doit être regardée comme fortuite, car je ne réponds pas de la dernière décimale dans le calcul direct.

(²) On peut penser *a priori* que z et $T - T_0$ devraient décroître avec ε. En réalité, si l'on calcule les dérivées de ces deux fonctions par rapport à $\theta = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, on trouve les valeurs suivantes : $-0,498$; $0,076$; $0,214$; $0,198$ et $-4,95$; $-2,81$; $-1,01$; $+1,49$. On en déduit, par interpolation graphique, que z et $T - T_0$ *passent par un maximum*, atteint approximativement pour $\varepsilon = 0,116$ et $\varepsilon = 0,032$; ce qui est bien d'accord avec les valeurs numériques obtenues.

et nous devons calculer la valeur du second membre pour $x = 0$. En l'ajoutant à D_S, nous devons retrouver $D_{S'}$; donc, on doit avoir

$$\Delta y = D_{S'} - D_S.$$

Le second membre est connu à l'ordre $\frac{10}{3}$ près en ε. Nous devons donc calculer Δy avec la même approximation. Comme z est d'ordre $\frac{4}{3}$, nous devons pousser le développement ci-dessus jusqu'au terme en z^2 inclus.

On peut, théoriquement, calculer chacun de ses coefficients par l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, donc par des quadratures portant exclusivement sur des fonctions connues et susceptibles d'être évaluées numériquement, en utilisant les résultats antérieurs. Mais c'est assez compliqué et je n'ai pas poursuivi ce calcul. On pourrait aussi recommencer le calcul numérique de la nouvelle trajectoire, en partant du point terminal d'abscisse $2 + z$; mais je n'ai pas voulu davantage entreprendre ce calcul et me suis contenté des vérifications dont le résultat a été donné au n° 50.

SUR

LES CONGRUENCES DES CORDES DE CONTACT

DES

ENVELOPPES DE SPHÈRES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction. — Les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères à deux paramètres ont été introduites dans la théorie des congruences de sphères par Ribaucour ([1]). Ces congruences jouissent, vis-à-vis de la surface déférente (lieu des centres des sphères) d'un ensemble remarquable de propriétés que le lecteur trouvera exposées en détail dans les *Leçons* de G. Darboux (t. II et IV). G. Darboux les a utilisées systématiquement dans un certain nombre de théories géométriques, et notamment dans ses recherches sur la représentation sphérique des surfaces. Après Ribaucour et Darboux, L. Bianchi a été amené à envisager les congruences en question en les associant surtout à des problèmes concernant la déformation de la déférente ([2]). Plus récemment M. J. Drach ([3]) a fait une étude systématique de la déformation des congruences de sphères par déformation de la déférente, et parmi les résultats qu'il a obtenus, plusieurs se rapportent précisément à la congruence des cordes de contact.

C'est de cette congruence qu'il va être question dans le présent travail. Une congruence rectiligne arbitrairement donnée peut toujours être regardée (d'une infinité de façons) comme la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères. Cette remarque permet de mettre (d'une infinité de façons) les équations de *toute* congruence rectiligne, sous une forme invariante analogue à celle sous laquelle Weingarten a mis les équations d'une congruence normale

([1]) A. RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VII, 1891.

([2]) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, 1re partie, 3e édition.

([3]) J. DRACH, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* (*C. R. Congrès des Sociétés Savantes*, 1925).

quelconque. La forme en question se prête aisément à des transformations des congruences des cordes de contact relatives à une déférente déterminée, en congruences analogues relatives à la même déférente en relation simple avec les premières. A ces transformations on peut rattacher, entre autres choses, une interprétation géométrique des formes différentielles secondes covariantes, et une mise sous forme invariante de l'équation d'un intéressant réseau découvert par M. J. Drach.

Le cas où la congruence des cordes de contact est normale et la déférente sphérique est examiné plus spécialement. Les congruences normales de contact relatives à une déférente quelconque dépendent d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à laquelle on peut toujours donner la forme de Laplace. Cette équation est identiquement vérifiée si la déférente est sphérique, ce qui signifie, conformément d'ailleurs à une remarque de Ribaucour, que toute congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères à déférente sphérique est nécessairement normale. Mais si l'on déforme la sphère déférente l'indétermination disparaît, et l'on est conduit à envisager, pour les congruences normales de contact des enveloppes de sphères dont la déférente est à courbure totale constante positive, un procédé de transformation en relation étroite avec la transformation d'Hazzidakis des surfaces applicables sur la sphère.

Le problème général de la recherche des enveloppes de sphères à congruences des cordes de contact normales restant normales (et de contact) pour une déformation *finie*, *continue* ou *arbitraire* de la déférente est étudié d'une façon complète. Il existe des congruences de sphères déformables avec conservation de l'orthogonalité de la congruence des cordes de contact appartenant à chacun des trois types de déformation ci-dessus. Le cas de la déformation finie conduit à choisir les couples de déférentes déformées associées, parmi les surfaces ayant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que les déformées de la sphère. Le cas de la déformation *arbitraire* conduit à choisir comme déférentes les surfaces applicables sur les surfaces de révolution et, pour chacune de ces surfaces, la loi de variation du rayon de la sphère génératrice de la congruence correspondante est susceptible d'une élégante interprétation géométrique.

Le problème de la recherche des enveloppes de sphères à congruence des cordes de contact normales, est en liaison intime et bien connue avec diverses questions concernant les systèmes triples orthogonaux ou les systèmes cycliques. L'examen de cette liaison, fait du point de vue adopté dans le présent travail conduit, en particulier, à des procédés de transformation des systèmes cycliques normaux, soit à une sphère, soit à la surface la plus générale.

1. *Les congruences des cordes de contact d'une enveloppe de sphères.* — Étant donnée une congruence de sphères, nous désignerons par Σ la sphère

génératrice, par $P(x, y, z)$ son centre, par S la déférente (lieu de P), et par $R(u, v)$ le rayon de Σ, u et v étant les deux paramètres fixant les différentes sphères Σ. Les coefficients du ds^2 de S et de sa deuxième forme fondamentale seront (E, F, G) et (D, D′, D″). La notation φ_{ij} représentera les dérivées secondes covariantes de la fonction $\varphi(u, v)$ relatives au ds^2 de S; $\Delta\varphi$, $\Delta_2\varphi$, $\Delta_{22}\varphi$ seront les paramètres différentiels de cette même fonction, et $\Delta(\varphi, \psi)$ le paramètre différentiel mixte des deux fonctions φ et ψ. L'enveloppe de Σ se composera, en général, de deux nappes distinctes σ et σ' que la sphère touchera respectivement aux points M et M′. (MM′) est la corde des contacts de Σ avec son enveloppe; elle perce le plan tangent en P à S en un point I (milieu de MM′) dont les coordonnées seront désignées par ξ, η, ζ. Il est bien connu que les points M, M′, et par suite le point I et la corde des contacts (MM′), restent invariablement liés au plan tangent en P à S lorsque S se déforme en entraînant les sphères Σ centrées en ses différents points et les plans tangents en ces points.

Dès que l'on se donne la déférente S d'une enveloppe de sphères et le rayon $R(u, v)$ de la sphère génératrice, l'enveloppe est déterminée et il en est de même de la congruence des cordes de contact. On peut prendre comme surface de départ, pour définir cette congruence, la surface lieu du point I (ξ, η, ζ); un rayon quelconque (MM′) sera alors défini par le point I correspondant et par ses cosinus directeurs X, Y, Z qui sont ceux de la normale en P à la déférente. Les expressions de ξ, η, ζ s'obtiennent sans difficulté; ce sont (*voir* L. Bianchi, *loc. cit.*)

$$\xi = x - R\Delta(x, R),$$
$$\eta = y - R\Delta(y, R),$$
$$\zeta = z - R\Delta(z, R),$$

que nous écrirons en posant $R^2 = -2\rho$

$$(1) \qquad \xi = x + \Delta(x, \rho), \qquad \eta = y + \Delta(y, \rho), \qquad \zeta = z + \Delta(z, \rho).$$

Des relations (1) on déduit aussitôt l'expression suivante, qui nous sera utile plus loin, de la distance PI de la corde des contacts au point P

$$PI = \sqrt{S(\xi - x)^2} = \sqrt{S\Delta(x, \rho)^2} = \sqrt{\Delta\rho}.$$

On peut se demander si les formules (1) définissent la congruence rectiligne la plus générale de l'espace; autrement dit, si une congruence rectiligne arbitrairement donnée peut être considérée comme la congruence des cordes de contact d'une certaine enveloppe de sphères. Les propositions suivantes de Ribaucour (*loc. cit.*) prouvent qu'il en est bien ainsi :

A. La congruence C de la corde des contacts d'une enveloppe de sphères de déférente S *admet pour représentation sphérique de ses développables la représentation sphérique d'un réseau conjugué de* S. En outre, les deux plans focaux

issus d'un rayon quelconque de C sont perpendiculaires aux tangentes du réseau au point correspondant.

B. Si les points d'une surface S et les droites d'une congruence C se correspondent de telle façon, que chaque droite de C soit perpendiculaire au plan tangent au point correspondant de S, et qu'aux développables de C corresponde un réseau conjugué de S, C *est la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur* S (¹).

Il résulte de ces propositions que si C est une congruence rectiligne quelconque, et (γ) l'ensemble des deux familles de courbes de la sphère unitaire image des développables de C, toute surface S admettant un réseau conjugué de représentation sphérique (γ) est la déférente d'une congruence de sphères admettant C pour congruence des cordes de contact. En outre, l'ensemble des surfaces S admettant (γ) comme image sphérique d'un réseau conjugué fournit la totalité des congruences de sphères admettant C pour congruence des cordes de contact. Il est bien connu que l'ensemble des surfaces S admettant un réseau conjugué de représentation sphérique donnée, est défini par une équation aux dérivées partielles de Laplace du type hyperbolique.

Dans le cas, dont il va être spécialement question dans la suite, où C est une congruence normale, l'image sphérique de ses développables est un réseau orthogonal de la sphère unitaire, et les déférentes des congruences de sphères admettant C pour congruence des cordes de contact sont les surfaces admettant (γ) pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Il est à noter que dans ce cas particulier toutes les sphères sont des déférentes possibles : une sphère quelconque peut, en effet, être considérée comme une surface admettant (γ) pour représentation sphérique. D'ailleurs, les seules congruences rectilignes de contact associées à une déférente sphérique sont les congruences normales, comme cela résulte de la proposition A : les deux plans focaux issus d'un même rayon d'une telle congruence sont, en effet, perpendiculaires à deux tangentes conjuguées de la sphère, et sont par suite rectangulaires.

Dans le problème général de la recherche des enveloppes de sphères admettant une déférente donnée pour lesquelles la congruence des cordes de contact est normale, le cas de la déférente sphérique, pour lequel la solution est formée par l'ensemble de *toutes* les congruences normales de l'espace, va donc se présenter comme un cas d'indétermination. C'est ce que nous constaterons au numéro 3, où nous mettrons le problème en équation, en vue de l'étude des enveloppes de sphères à congruences de contact normales et de leurs transformations ou déformations possibles. La détermination de l'équation des déve-

(¹) Et évidemment aussi de toutes celles que l'on obtient en ajoutant une constante quelconque aux carrés des rayons des différentes sphères.

loppables de la congruence générale définie par les équations (1) n'offre pas de difficultés. Si l'on suppose la déférente rapportée à ses lignes de courbure ($F = D' = 0$), on obtient

$$\rho_{12} D\,du^2 + [D(\rho_{22} + G) - D''(\rho_{11} + E)]\,du\,dv - \rho_{12} D''\,dv^2 = 0. \tag{2}$$

La forme (2) de l'équation des développables fournit aussitôt un certain nombre de propositions dues à Ribaucour. Ainsi, par exemple, la proposition A précédemment énoncée résulte immédiatement de la comparaison de (2) et de l'équation des asymptotiques ($D\,du^2 + D''\,dv^2 = 0$). On voit de même que la condition pour que la congruence des cordes de contact soit normale est

$$\rho_{12} = 0.$$

En développant ρ_{12} on obtient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

qui définit toutes les enveloppes de sphères à congruences de contact normales admettant une déférente S donnée.

Si S est une sphère (de rayon 1 par exemple), les coordonnées x, y, z d'un point quelconque P de S ne sont autre chose que les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale. Les formules (1) définissant la congruence de contact la plus générale associée à S s'écrivent alors

$$\xi = X + \Delta(X, \rho), \qquad \eta = Y + \Delta(Y, \rho), \qquad \zeta = Z + \Delta(Z, \rho),$$

et expriment (Weingarten) que cette congruence est la congruence normale la plus générale de l'espace, comme nous l'avions déjà observé.

2. *Remarques sur les formules* (1). — Nous venons de voir qu'en se donnant arbitrairement les quatre fonctions (x, y, z, ρ) qui figurent dans les formules

$$\xi = x + \Delta(x, \rho), \qquad \eta = y + \Delta(y, \rho), \qquad \zeta = z + \Delta(z, \rho). \tag{1}$$

ces formules représentent la congruence rectiligne la plus générale de l'espace : le rayon générateur est issu du point $I(\xi, \eta, \zeta)$ situé dans le plan tangent en $P(x, y, z)$ à la surface S, ses cosinus directeurs (X, Y, Z) sont ceux de la normale en P à S, et le paramètre différentiel Δ se rapporte au ds^2 de S. Il y a là une généralisation des formules que Weingarten a données pour représenter la congruence *normale* la plus générale

$$\mathfrak{x} = \Delta(M, X), \qquad \mathfrak{y} = \Delta(M, Y), \qquad \mathfrak{z} = \Delta(M, Z). \tag{3}$$

Dans ces dernières formules X, Y, Z sont les cosinus directeurs d'un rayon quelconque, M la distance algébrique (comptée positivement suivant la direction X, Y, Z) de l'origine O des coordonnées au plan tangent correspondant

à l'une quelconque S des surfaces orthogonales aux rayons, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les coordonnées de la projection orthogonale de O sur le rayon envisagé, et Δ le paramètre différentiel mixte relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence. Si I désigne le point où le rayon générateur de la congruence normale considérée perce le plan tangent à la sphère unitaire au point P(X, Y, Z) (parallèle au plan tangent correspondant à S), et si l'on prend pour surface de départ, non plus le lieu des projections ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) de O sur les différents rayons, mais celui du point I, les équations (3) sont à remplacer par

$$(4) \qquad \xi = X + \Delta(M, X), \qquad \eta = Y + \Delta(M, Y), \qquad \zeta = Z + \Delta(M, Z).$$

Les formules (4), identiques aux formules (1), fournissent une nouvelle interprétation géométrique de la fonction M. D'après Weingarten, M représente la distance algébrique de l'origine au plan tangent de normale (X, Y, Z) à l'une des surfaces orthogonales à la congruence; au point de vue actuel $-2M = R^2$ représente le carré du rayon de la sphère qu'il faut centrer en chaque point P de la sphère unitaire, pour que l'enveloppe de l'ensemble de sphères ainsi obtenues admette la congruence normale envisagée comme congruence de ses cordes de contact.

Dans le cas d'une congruence rectiligne quelconque donnée *a priori*, le problème de la mise des équations qui la représentent sous la forme (1) ne présente évidemment pas la même simplicité que pour les congruences normales; ce problème exige, en dehors de la détermination des développables, l'intégration de l'équation de Laplace dont dépend la déférente $S(x, y, z)$, puis la détermination de ρ (une quadrature). Mais, telles qu'elles sont, les formules (1) sont loin de manquer d'intérêt. Une première remarque simple à faire à leur sujet est la suivante : Remplaçons dans les formules (1) relatives à une congruence C déterminée ρ par une fonction quelconque $F(\rho)$ de ρ, ce qui revient à dilater les rayons des sphères Σ dont l'enveloppe admet C pour congruence des cordes de contact d'une quantité fonction déterminée de ces rayons; les quantités $\Delta(x, \rho)$, $\Delta(y, \rho)$, $\Delta(z, \rho)$ se trouvent alors multipliées par un même facteur $F'(\rho)$, et les différents vecteurs $\overrightarrow{PI}$ sont multipliés par ce même facteur. La congruence C est donc transformée en une nouvelle congruence de contact C′ relative à la même déférente S, deux rayons homologues quelconques (de même image sphérique) de C et C′ *étant situés dans un même plan avec la normale à* S *au point correspondant*. Toutes les congruences de contact relatives aux enveloppes de sphères déduites d'une enveloppe de sphères donnée en modifiant le rayon de la sphère génératrice d'après une loi fonction du rayon seul, se correspondent donc *avec coplanéité des rayons homologues*. Il en est ainsi en particulier si la congruence C est *normale* et si on l'associe (comme congruence des cordes de contact) à une déférente sphérique (de centre O). La transformation ci-dessus revient alors à remplacer M (distance

de O au plan tangent à l'une quelconque des surfaces normales à C) par une fonction de M. La congruence transformée C′ étant une congruence de contact relative à la même déférente sphérique, est *normale* comme toutes les congruences de contact relatives à des sphères. On peut donc énoncer le résultat suivant, qui découle d'ailleurs aussi des formules (3) de Weingarten :

Si l'on déplace chaque plan tangent d'une surface, parallèlement à lui-même, d'une quantité fonction de la distance de ce plan à un point fixe O *de l'espace, les nouveaux plans enveloppent une surface dont les normales sont, avec les normales homologues* (*parallèles*) *de la surface initiale, dans des plans passant tous par le point fixe* O.

Il est d'ailleurs facile de se rendre compte que l'opération géométrique précédente fournit *toutes* les congruences normales correspondant avec parallélisme des rayons homologues à une congruence normale C donnée, les rayons homologues de C et de toutes ses transformées étant situés dans des plans issus d'un point fixe O. Si C′ est une congruence normale présentant avec C la relation géométrique ci-dessus, et si M et M′ sont les distances de O à deux plans tangents homologues de deux surfaces normales à C et C′ respectivement, on a, d'après les formules (2) de Weingarten,

$$\frac{\Delta(M', X)}{\Delta(M, X)} = \frac{\Delta(M', Y)}{\Delta(M, Y)} = \frac{\Delta(M', Z)}{\Delta(M, Z)} = \lambda,$$

d'où, en supposant pour simplifier que l'on ait choisi comme représentation sphérique commune des deux congruences le système des génératrices rectilignes de la sphère unitaire

$$\frac{\partial X}{\partial u}\left(\frac{\partial M'}{\partial v} - \lambda\frac{\partial M}{\partial v}\right) + \frac{\partial X}{\partial v}\left(\frac{\partial M'}{\partial u} - \lambda\frac{\partial M}{\partial u}\right) = 0,$$

et deux relations analogues en Y et Z. On déduit de ces relations

$$\frac{\partial M'}{\partial v} - \lambda\frac{\partial M}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial M'}{\partial u} - \lambda\frac{\partial M}{\partial u} = 0,$$

et par suite

$$\frac{D(M', M)}{D(u, v)} = 0,$$

ce qui montre bien que M′ est fonction de M conformément au résultat annoncé (¹).

(¹) Un raisonnement analogue, fait en substituant à (X, Y, Z, M), (x, y, z, ρ), montre qu'étant donnée une congruence de contact (C) relative à une déférente déterminée S et correspondant à une fonction $\rho(u, v)$ déterminée, on obtient *toutes* les congruences de contact relatives à la même déférente, dont les rayons sont coplanaires avec les rayons homologues de (C) et de la congruence des normales à S, en remplaçant ρ par une fonction arbitraire $F(\rho)$ de ρ.

Nous ne développerons pas ici la remarque qui précède, relative à la substitution de $F(\rho)$ à ρ dans les équations de la congruence la plus générale, définie par les formules (1); nous en signalerons seulement les conséquences immédiates suivantes dont certaines nous seront utiles plus loin. Prenons $F(\rho) = k\rho$ ($k = \text{const.}$), ce qui revient à multiplier les rayons des sphères Σ centrées aux différents points P de S par un nombre fixe $(\sqrt{k})$. Un rayon quelconque D de la congruence de contact considérée, perpendiculaire au plan tangent à S en I, est remplacé par le rayon homologue D′ de la congruence des cordes de contact de l'enveloppe de sphères transformée. D′, qui est parallèle à D, est, comme on l'a vu, *situé dans le plan* (P, D), et perce le plan tangent en P à S en un point I′ situé sur la droite PI. L'expression de $\overline{PI}$ donnée au numéro 2 $\left[\overline{PI} = \sqrt{\Delta\rho}\right]$ montre que l'on a $\overrightarrow{PI'} = k.\overrightarrow{PI}$, ce qui revient à dire que, si (D) est une congruence de contact relative à S, et (N) la congruence des normales à S (qui est évidemment de contact pour les enveloppes de sphères de rayon constant centrées sur S), toute droite Δ du plan de deux rayons homologues (N, D) des deux congruences précédentes parallèle à ces rayons et partageant leur distance dans un rapport constant engendre, lorsque le couple (N, D) varie, une nouvelle congruence *de contact* relative à S (1).

Les développables des ∞^1 congruences (Δ) obtenues en faisant varier le facteur k ne se correspondent pas comme le montre l'équation de ces développables donnée au numéro 1, mais, conformément à la proposition (A) de Ribaucour, *aux développables de chacune de ces congruences correspond un réseau conjugué de* S. Cela étant, imaginons que l'on fasse subir à S une homothétie de centre O et de rapport λ, et qu'en même temps on multiplie les rayons des sphères dont l'enveloppe admet (D) pour congruence des cordes de contact par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, donc ρ par $\frac{1}{\lambda}$. On obtiendra ainsi une nouvelle enveloppe de sphères admettant pour déférente la surface S_1 homothétique de S dans l'homothétie (O, λ), et dont la congruence des cordes de contact (D_1) jouit évidemment de la propriété que les différents vecteurs $\overrightarrow{P_1I_1}$ sont équipollents aux vecteurs $\overrightarrow{PI}$ relatifs à (D). La congruence (D_1) admettant d'après (A) pour représentation sphérique de ses développables l'image d'un réseau conjugué de S_1, et par suite de S, peut être regardée comme une *congruence de contact relative à la déférente* S. Si l'on fait tendre λ vers zéro, P_1 tend vers O, $\overrightarrow{P_1I_1}$ reste équipollent à $\overrightarrow{PI}$, et I_1 tend vers le point J extrémité du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

(1) Les congruences des normales aux enveloppes de sphères transformées par la transformation $\rho \to k.\rho$ (ou, si l'on a égard aux rayons des sphères, $R \to \sqrt{k}.R$), sont dans la relation du théorème de Malus-Dupin sur la réfraction des congruences normales, la déférente jouant le rôle de surface dirimante.

Étant donnée une congruence de contact quelconque (D) relative à une déférente donnée S, si I est le point où l'un quelconque D de ses rayons (correspondant au point P de S) perce le plan tangent en P à S, si l'on mène par un point fixe O de l'espace le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$, et si l'on construit la droite Δ parallèle à D issue de J, *l'ensemble des droites* Δ *ainsi obtenues constitue une nouvelle congruence* (Δ) *de contact pour la même déférente* S.

Le réseau conjugué de S correspondant aux développables de (Δ) est distinct de celui qui correspond aux développables de la congruence de contact initiale (D). On l'obtient évidemment, d'après l'exposition de la construction géométrique qui précède dans laquelle les rayons des sphères de la congruence initiale ont été multipliés par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (donc ρ par $\frac{1}{\lambda}$, λ tendant vers zéro), en remplaçant dans l'équation (2) ρ_{ij} par $\frac{\rho_{ij}}{\lambda}$ et en faisant tendre λ vers zéro, ce qui donne

$$\rho_{12}\mathrm{D}\,du^2 + (\mathrm{D}\rho_{22} - \mathrm{D}''\rho_{11})\,du\,dv - \rho_{12}\mathrm{D}''\,dv^2 = 0, \tag{5}$$

la déférente étant toujours supposée rapportée à ses lignes de courbure.

Il est clair que la construction géométrique qui a donné (Δ) à partir de (D), faite à partir de (Δ) considérée comme congruence de contact relative à S, donne une nouvelle congruence (Δ'), distincte de (D) et (Δ) et pouvant à son tour être regardée comme la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères de déférente S; la même construction appliquée à (Δ') fournira une nouvelle congruence de contact (Δ'') relative à S, et ainsi de suite. De là la possibilité, étant donnée une congruence de contact relative à une déférente déterminée, d'obtenir sans quadratures une suite illimitée de congruences de contact relatives à la même déférente. Comme la position du point O par rapport à S est arbitraire, en faisant varier ce point on obtiendra ∞^3 suites illimitées de congruences de contact distinctes relatives à une déférente S donnée, à partir d'une telle congruence (D) supposée connue.

Si (D) est normale, toutes les congruences transformées le sont aussi, et leurs développables se correspondent comme correspondant aux lignes de courbure de S.

La considération des formules définissant la congruence (Δ) transformée de (D) par la construction dont il vient d'être question, conduit à des remarques qu'il y a lieu de noter. Les coordonnées du point J, projection orthogonale de O sur le rayon Δ, homologue du rayon D de la congruence (D) définie par les formules (1) dont (Δ) dérive, sont, puisque $\overrightarrow{OJ}$ est équipollent à $\overrightarrow{PI}$,

$$\mathfrak{X} = \Delta(x, \rho), \qquad \mathfrak{Y} = \Delta(y, \rho), \qquad \mathfrak{Z} = \Delta(z, \rho), \tag{6}$$

les cosinus directeurs du rayon Δ envisagé étant X, Y, Z, cosinus directeurs de

la normale à la surface S au point P(x, y, z). Si l'on tient compte des identités suivantes

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Delta(x,\rho)}{\partial u}=\rho_{11},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Delta(x,\rho)}{\partial v}=\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Delta(x,\rho)}{\partial u}=\rho_{12},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Delta(x,\rho)}{\partial v}=\rho_{22},$$

et si l'on forme la combinaison

$$\mathrm{S}\,dx.d\Delta(x,\rho),$$

on obtient une forme différentielle qui n'est pas autre chose que la *différentielle seconde covariante* de la fonction $\rho(u, v)$ relative au ds^2 de S, soit

$$\rho_{11}\,du^2+2\rho_{12}\,du\,dv+\rho_{22}\,dv^2.$$

En annulant la combinaison ci-dessus on obtiendra donc une équation

$$\mathrm{S}\,dx.d\Delta(x,\rho)=0, \tag{7}$$

qui exprimera une propriété du couple de congruences (D), (Δ) invariante par déformation arbitraire de la déférente. Or (7) exprime que les déplacements infiniment petits correspondants des points P et J sont orthogonaux. On peut donc dire que si l'on considère, sur S, le réseau constitué par les deux familles de courbes le long desquelles les déplacements infinitésimaux du point P sont orthogonaux aux déplacements correspondants de J, ce réseau est *invariant par déformation arbitraire de* S. Il faut entendre par là, que si S se déforme en entraînant l'ensemble des sphères admettant la congruence (D) pour congruence des cordes de contact, ce sont toujours les deux mêmes familles de courbes de S qui portent les déplacements infinitésimaux de P orthogonaux aux déplacements du point J correspondant.

La comparaison de l'équation

$$\rho_{11}\,du^2+2\rho_{12}\,du\,dv+\rho_{22}\,dv^2=0 \tag{8}$$

et de l'équation (5) des développables de la congruence (Δ), prouve que les courbes de S correspondant aux développables de (Δ) forment un réseau qui, en même temps que *conjugué*, est *harmonique* par rapport au réseau *invariant* dont nous venons d'établir l'existence.

Un ds^2 et une fonction arbitraire $\rho(u, v)$ des deux variables indépendantes (u, v) étant donnés, il suffit, comme l'on voit, d'envisager la fonction ρ comme définissant la loi de variation du rayon $\left(\mathrm{R}=\sqrt{-2\rho}\right)$ d'une sphère centrée au point (u, v) d'une surface admettant le ds^2 considéré, pour avoir, par ce qui précède, une signification géométrique de la forme différentielle seconde covariante de ρ relative au ds^2 envisagé.

Le réseau invariant (8) est en relation avec un réseau, également invariant, porté par S et découvert par M. J. Drach (*Mém. cité*), dont il peut d'ailleurs être considéré comme un cas limite au sens que nous allons préciser. M. J. Drach, dans son Mémoire, a été amené à choisir, sur la déférente, un système de coordonnées orthogonal particulièrement commode, lié à la loi de variation du rayon de la sphère génératrice de la congruence étudiée. Nous allons ici laisser aux coordonnées curvilignes choisies sur la déférente toute leur généralité; cela nous permettra de mettre l'équation du réseau de M. Drach sous une forme invariante particulièrement remarquable, et d'inclure ce réseau dans un faisceau de réseaux analogues de S admettant pour réseaux de base, d'une part le réseau (8) que nous avons introduit plus haut, et d'autre part le réseau des lignes de longueur nulle de S.

Considérons une enveloppe quelconque de sphères centrées sur S, et la congruence (D) de ses cordes de contact. M. J. Drach a montré que le réseau conjugué de S correspondant aux développables de (D) est harmonique par rapport à un certain réseau invariant par déformation de S, ce réseau pouvant être défini par la propriété que les courbes qui le constituent correspondent, par orthogonalité des éléments linéaires, aux courbes homologues décrites par le point I où D perce le plan tangent à S. Exprimons analytiquement cette dernière propriété. Les coordonnées de P étant (x, y, z), et celles de $I(\xi, \eta, \zeta)$ étant données par les formules (1), l'orthogonalité des déplacements infinitésimaux correspondants de P et I se traduit par la relation

$$S\,dx.d\xi = S\,dx.d(x + \Delta(x, \rho)) = 0,$$

soit, en introduisant l'élément linéaire de S, et en tenant compte de ce que, comme nous l'avons vu, $S\,dx.d\Delta(x, \rho)$ est la forme différentielle seconde covariante de ρ, forme que nous représenterons par $\delta^2\rho$

$$ds^2 + \delta^2\rho = 0. \tag{9}$$

Telle est la forme invariante simple annoncée de l'équation du réseau invariant de M. J. Drach.

Nous avons observé plus haut, au sujet de la substitution de $k\rho$ à ρ dans les équations (1) de (D), que cette substitution revenait à remplacer (D) par une nouvelle congruence *de contact* relative à la même déférente S, un rayon quelconque D' de cette congruence (parallèle au rayon D correspondant) étant situé dans le plan (P, D) et coupant le plan tangent en P à S au point I' tel que $\overrightarrow{PI'} = k.\overrightarrow{PI}$. L'ensemble des congruences de contact relatives aux différentes valeurs de k forme un faisceau de congruences à rayons homologues parallèles et coplanaires, et l'ensemble des réseaux invariants de M. Drach relatifs à ces diverses congruences constitue un faisceau de tels réseaux. Le réseau général de ce faisceau s'obtient évidemment en remplaçant ρ par $k\rho$

dans (9), ce qui donne

$$ds^2 + k\,\delta^2\rho = 0.$$

Pour $k = \infty$ on obtient le réseau $\delta^2\rho = 0$, ce qui est conforme à la construction géométrique exposée plus haut qui nous a conduit à la considération de ce réseau. Pour $k = 0$, on obtient le réseau des lignes de longueur nulle de S; ce réseau est bien un réseau de M. Drach particulier, puisque pour $k = 0$ la congruence (D) se réduit à celle des normales à S et que, I étant ici confondu avec P, les déplacements de ces deux points ne peuvent être orthogonaux que sur les lignes de longueur nulle de S.

Les aperçus géométriques qui précèdent mettent suffisamment en évidence l'intérêt qu'il peut y avoir, dans certains cas, à envisager la congruence rectiligne la plus générale de l'espace comme la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères. L'adjonction d'une enveloppe de sphères à la congruence rend parfois intuitifs certains résultats qui, une fois obtenus, peuvent être dégagés de la considération des sphères qui ont servi à les établir, et présentés dans le style ordinaire de la théorie des congruences rectilignes. Il en est ainsi, par exemple, du résultat obtenu dans le paragraphe actuel relativement aux transformations des congruences de contact déduites de la substitution de $k\rho$ à ρ. Dire qu'une congruence est la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères de déférente S, c'est dire qu'elle est *orthogonale* (1) à un réseau conjugué porté par S, et le résultat en question peut être ainsi présenté :

Si une congruence (D) et un réseau conjugué (P) sont orthogonaux, toute congruence obtenue en transformant chaque rayon D par l'homothétie (P, k), $k = \text{const.}$, *est orthogonale à un certain réseau conjugué ayant même surface support que* (P). En outre, si l'on déplace chaque système (P, D) par la translation qui amène P en un point fixe O, l'ensemble des droites Δ transformées *décrit encore une congruence orthogonale à un réseau conjugué de même support que les précédents.*

Dans le cas particulier où (P) est un réseau de courbure, la proposition précédente n'est pas nouvelle; les différents réseaux conjugués relatifs aux diverses congruences transformées de (D) sont alors tous confondus avec le réseau de courbure (P); mais il n'en est pas de même dans le cas général que nous venons d'envisager, où les différents réseaux conjugués relatifs aux congruences de (D) sont tous distincts.

---

(1) Rappelons qu'une congruence et un réseau sont dits orthogonaux, si les rayons de la congruence et les plans tangents du réseau sont en correspondance telle que la droite génératrice de la congruence est perpendiculaire au plan tangent correspondant du réseau, les développables de la congruence correspondant aux courbes du réseau.

3 *Congruences de contact normales.* — Nous avons déjà eu l'occasion de voir que, si une surface S est rapportée à ses lignes de courbure, la condition pour que la congruence des cordes de contact (MM′) d'une enveloppe de sphères centrées sur S et définies par leurs rayons $\rho(u, v)$ soit normale est

$$\rho_{12} = 0.$$

En vue des développements qui vont suivre nous avons besoin de rechercher la forme que prend l'équation précédente lorsque la déférente est rapportée au système (u, v) le plus général. La condition pour que (MM′) soit normale est (les notations étant toujours les mêmes)

$$\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}. \tag{10}$$

Un calcul facile, fait en tenant compte des expressions (1) de ξ, η, ζ, des expressions de $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{FD' - GD}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{FD'' - GD'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v}. \qquad (H = \sqrt{EG - F^2}).$$

et de celles des dérivées des paramètres différentiels $\Delta(x, \rho)$, $\Delta(y, \rho)$, $\Delta(z, \rho)$ qui sont

$$\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial u} = \frac{(G\rho_{11} - F\rho_{12})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{(E\rho_{12} - F\rho_{11})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v}$$
$$+ \frac{1}{H^2}\left[\left(G\frac{\partial \rho}{\partial u} - F\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)D + \left(E\frac{\partial \rho}{\partial v} - F\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)D'\right]X,$$
$$\frac{\partial \Delta(y, \rho)}{\partial u} = \ldots, \qquad \frac{\partial \Delta(z, \rho)}{\partial v} = \ldots,$$
$$\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial v} = \frac{(G\rho_{12} - F\rho_{22})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{(E\rho_{22} - F\rho_{12})}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v} +$$
$$+ \frac{1}{H^2}\left[\left(G\frac{\partial \rho}{\partial u} - F\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)D' + \left(E\frac{\partial \rho}{\partial v} - F\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)D''\right]X,$$
$$\frac{\partial \Delta(y, \rho)}{\partial v} = \ldots, \qquad \frac{\partial \Delta(z, \rho)}{\partial v} = \ldots,$$

transforme l'équation (10) en

$$\rho_{11}(FD'' - GD') + \rho_{12}(GD - ED'') + \rho_{22}(ED' - FD) = 0.$$

que nous écrirons sous la forme

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Telle est, S étant rapportée à un système de coordonnées curvilignes quelconques, la condition pour que la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur S soit normale. De par la symétrie de sa forme, l'équation (11) se prête particulièrement à l'étude des congruences normales de contact; elle est d'ailleurs susceptible de rapprochements intéressants.

(11) redonne aussitôt des résultats antérieurement énoncés. Ainsi, si la déférente est rapportée à ses lignes de courbure, on a $F = 0$, $D' = 0$, et l'on retrouve l'équation $\rho_{12} = 0$. De même, si la déférente est une sphère (de rayon 1 par exemple), on a

$$D = -E, \qquad D' = -F, \qquad D'' = -G;$$

le déterminant (11) est identiquement nul, et l'on retrouve le résultat suivant lequel toute enveloppe de sphères à déférente sphérique admet comme congruence de ses cordes de contact une congruence normale.

On lit aussi sur l'équation (11) que, si ρ et ρ' définissent deux congruences de contact normales relatives à la même déférente S, il en est de même de $\rho'' = a\rho + b\rho' + c$, ($a$, b, c = const.), et que par suite, si deux enveloppes de sphères centrées sur la même déférente et de rayons générateurs respectifs R et R', ont des congruences de contact normales, il en est de même des enveloppes de sphères de même déférente dont les rayons générateurs R'' sont définis par $R''^2 = aR^2 + bR'^2 + c$. Cette circonstance correspond au fait bien connu que si deux surfaces ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, il en est de même de toutes les surfaces obtenues en partageant dans un rapport constant arbitraire les segments joignant deux points homologues (de même image sphérique) quelconques sur les deux surfaces.

Mais une remarque plus intéressante est la suivante. Introduisons la troisième forme quadratique fondamentale de la déférente (supposée non développable), c'est-à-dire le ds^2 de sa représentation sphérique

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Cette troisième forme est une combinaison linéaire des deux premières, on a

$$e = -(KE + HD), \qquad f = -(KF + HD'), \qquad g = -(KG + HD''),$$

K et H désignant les courbures totale et moyenne de S; il en résulte que l'on peut, dans l'équation (11), substituer e, g, f à E, G, F respectivement. On peut donc écrire (11) sous la forme

$$(11') \qquad \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ e & f & g \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous sommes ainsi amenés à porter notre attention sur les enveloppes de sphères, admettant pour déférentes deux surfaces applicables sur une sphère

et transformées d'Hazzidakis l'une de l'autre. Soient S et S_1 deux telles surfaces; S_1 s'obtient en échangeant la première et la troisième forme fondamentale de S, la deuxième forme restant la même pour les deux surfaces. La correspondance entre S et S_1 conserve les aires, les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux (qui sont seulement permutés), mais ce n'est pas une applicabilité. La substitution de la troisième forme fondamentale de S à la première substitue, à l'équation (11), l'équation *équivalente* (11') qui définit les congruences de sphères de déférente S_1 admettant des congruences normales pour congruences des cordes de contact. On voit que le problème de la recherche des congruences de sphères à congruence des cordes de contact normales, une fois résolu pour une déférente à courbure totale constante positive, se trouve par cela même résolu pour la transformée d'Hazzidakis de cette déférente. D'une façon plus précise, si S et S_1 sont deux surfaces à courbure totale constante positive transformées d'Hazzidakis l'une de l'autre, et si (C) est la congruence de sphères la plus générale de déférente S admettant pour congruence des cordes de contact une congruence normale, il suffit pour avoir la congruence de sphères la plus générale à congruence de contact normale de déférente S_1, *de centrer en chaque point de* S_1 *une sphère égale à la sphère de* (C) *centrée au point correspondant de* S. D'ailleurs, dans la transformation qui fait passer des congruences de sphères (C) à celles que la construction ci-dessus leur associe, les développables des congruences des cordes de contact *sont conservées* comme correspondant aux lignes de courbure des deux déférentes transformées d'Hazzidakis.

4. *Déformation finie ou continue des congruences de contact.* — Dans l'exemple, qui termine le numéro précédent, de transformation de l'ensemble des congruences normales de contact relatives à une déférente déterminée en un ensemble analogue, la correspondance entre les deux déférentes transformées n'est pas l'une des applications possibles d'une déférente sur l'autre. Nous pouvons alors nous poser le problème de la recherche des surfaces telles que si l'on considère l'ensemble des congruences normales de contact relatives à l'une, S, de ces surfaces, on puisse trouver une déformation de S, après laquelle l'ensemble des congruences normales ci-dessus (chaque rayon étant supposé invariablement lié au plan tangent correspondant de S et entraîné avec ce plan) se transforme en l'ensemble analogue relatif à la déférente déformée de S.

L'équation (11) fournit aisément la solution de cette question. S étant supposée donnée, les rayons $R = \sqrt{-2\rho}$ des sphères centrées sur S définissant les différentes enveloppes de sphères de déférente S à congruences de contact normales, sont définies par l'équation (11) où E, F, G, D, D', D'' sont des quantités supposées connues. Nous supposerons, pour simplifier, S rapportée à ses lignes de courbure; on aura alors $F = D' = 0$, et l'équation (11) s'écrira

$$(GD - ED'')\rho_{12} = 0.$$

La quantité $(GD - ED'')$ n'est identiquement nulle que si S est une sphère. Dans ce dernier cas il n'existe pas de déformations (autres que l'une des déformations banales constituées par les différents glissements de S sur elle-même), transformant l'ensemble des congruences de contact relatives à S en l'ensemble analogue relatif à la déférente déformée $\overline{S}$. On sait en effet que le premier des deux ensembles ci-dessus est constitué par *toutes* les congruences normales de l'espace, alors qu'il *n'en est pas de même* pour le second qui correspond à une déférente *non sphérique*. Nous devons donc supposer

$$GD - ED'' \neq 0,$$

de sorte que l'équation (11) relative à S s'écrira

$$\varphi_{12} = 0. \tag{12}$$

L'équation (11) relative à une déformée $\overline{S}$ de S, définie par les coefficients $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$ de sa deuxième forme fondamentale, sera

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ E & O & G \\ \overline{D} & \overline{D'} & \overline{D''} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Pour qu'il existe une déformation de S, transformant les congruences normales de contact relatives à S en celles relatives à la surface déformée $\overline{S}$, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer les quantités $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$, satisfaisant aux équations de Gauss-Codazzi, et telles que l'équation (13) ait les mêmes solutions en φ que l'équation (12). (13), développée, s'écrit

$$(G\overline{D} - E\overline{D''})\varphi_{12} - \overline{D'}(E\varphi_{22} - G\varphi_{11}) = 0. \tag{13}$$

$\overline{S}$ ne pouvant être sphérique s'il s'agit d'une déformation $(\overline{S} - S)$ véritable, on aura nécessairement

$$G\overline{D} - E\overline{D''} \neq 0,$$

et l'on voit alors que l'équivalence de (12) et de (13) exige, soit que $\overline{D'} = 0$, soit que l'équation

$$E\varphi_{22} - G\varphi_{11} = 0$$

soit une conséquence de $\varphi_{12} = 0$. Cette dernière hypothèse étant impossible, on aura nécessairement

$$\overline{D'} = 0,$$

condition qui exprime que, sur la déférente déformée $\overline{S}$, le réseau (u, v) *est celui des lignes de courbure* tout comme sur la déférente initiale S.

Les surfaces S fournissant des solutions du problème envisagé sont donc les surfaces *susceptibles d'une déformation conservant les lignes de courbure*, les

surfaces $\overline{S}$ associées à S étant précisément celles qui lui correspondent dans la déformation précédente.

Le problème auquel nous venons de nous ramener (détermination des déformations à lignes de courbure persistantes) est bien connu. On sait qu'il convient de distinguer deux cas, suivant que S est susceptible d'une déformation *continue* conservant les lignes de courbure, ou d'une déformation *finie* conservant ces mêmes lignes. Dans le premier cas les surfaces S sont les *surfaces moulures à directrice cylindrique;* dans le second cas ce sont *les surfaces qui ont même image sphérique de leurs lignes de courbure que les surfaces déformées de la sphère.*

Parmi ces dernières surfaces figurent les surfaces à courbure moyenne constante. Une telle surface S est parallèle à une surface à courbure totale constante positive, et est susceptible d'une déformation finie (et une seule) la transformant en une surface S_1 de même courbure moyenne constante, avec conservation des lignes de courbure et permutation des rayons de courbure principaux. Si, au cours de cette déformation, S entraîne les enveloppes de sphères à congruences de contact normales dont elle est la déférente, après la déformation ces enveloppes de sphères retrouvent leur propriété initiale d'avoir des congruences normales pour congruences des cordes de contact. La considération des enveloppes de sphères à congruences des contacts normales est, comme l'on voit, l'origine d'un rapprochement nouveau, entre la transformation d'Hazzidakis des déformées de la sphère, et la déformation avec conservation des lignes de courbure des surfaces à courbure moyenne constante.

5. *Déformation arbitraire des congruences de contact.* — Après les déformations *finies* ou *continues* de la déférente d'une enveloppe de sphères, il est naturel d'en envisager les déformations *arbitraires* et de se demander comment se comportent, dans de telles déformations, les enveloppes de sphères à congruences des cordes de contact normales. Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des congruences normales de contact relatives à une déférente déterminée S ne peut, pour aucun choix de S, être conservé dans une déformation arbitraire de S. Pour toute surface S, il existe toujours une congruence normale de contact arbitrairement déformable avec S : c'est la congruence de ses normales qui est une congruence de contact pour les enveloppes de sphères de rayon constant centrées sur S. Si S est choisie arbitrairement, il n'existe pas d'autre congruence normale de contact arbitrairement déformable avec S que la congruence de ses normales. Mais il existe des surfaces S spéciales, auxquelles on peut associer des enveloppes de sphères, les admettant pour déférentes, et donnant lieu à des congruences de contact normales arbitrairement déformables, autres que les congruences formées par leurs normales. Ce sont ces surfaces et les congruences associées que nous allons maintenant déterminer.

Il s'agit d'exprimer que l'équation (11), supposée vérifiée par une certaine fonction $\rho(u, v)$, reste vérifiée par cette même fonction lorsque D, D', D'' varient en satisfaisant constamment aux équations de Gauss-Codazzi. Il faut et il suffit pour cela, étant donné la forme *linéaire* en D, D', D'' de l'équation (11), que les deux premières lignes du déterminant premier membre soient proportionnelles. Puisque nous n'envisageons que les congruences de contact arbitrairement déformables autres que celle formée par les normales à la déférente, la fonction $\rho(u, v)$ n'est pas une constante, et la proportionnalité indiquée fournit le système

$$\frac{\rho_{11}}{E} = \frac{\rho_{12}}{F} = \frac{\rho_{22}}{G}. \tag{14}$$

Si l'on choisit comme courbes $u = \text{const.}$ sur la déférente les courbes le long desquelles le rayon de la sphère génératrice Σ est constant, et comme courbes $v = \text{const.}$ les trajectoires orthogonales des précédentes, on aura évidemment

$$\rho = \rho(u), \qquad F = 0,$$

et le système (14) s'écrira

$$\rho_{12} = 0, \qquad G\rho_{11} - E\rho_{22} = 0,$$

soit en remplaçant les dérivées covariantes par leurs expressions,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \dfrac{\partial}{\partial u} \log\sqrt{EG}\, \dfrac{\partial \rho}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

La première équation (15) prouve que E est fonction de u seulement. En changeant le paramètre u, on peut prendre $E = 1$. La deuxième équation du système s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\log \frac{\partial \rho}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u} \log\sqrt{G},$$

d'où, par intégration,

$$\sqrt{G} = V \frac{\partial \rho}{\partial u} \qquad (V = \text{fonct. de } v),$$

et, moyennant un changement du paramètre v,

$$\sqrt{G} = \frac{\partial \rho}{\partial u}.$$

On voit que les déférentes des enveloppes de sphères, à congruences de contact normales arbitrairement déformables, dont l'élément linéaire a la forme

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 dv^2 \qquad [\rho = f(u)],$$

sont *applicables sur des surfaces de révolution.*

Inversement, toute surface S applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2 \qquad (U = \text{fonct. de } u) \tag{16}$$

fournit une solution du problème posé, le rayon R de la sphère centrée au point (u, v) de S étant défini par la relation

$$\rho = -\frac{R^2}{2} = \int U\,du, \tag{17}$$

d'où l'on déduit

$$R = \sqrt{2\int U\,du}.$$

Si l'on observe que l'on peut, en modifiant v, remplacer U par λU ($\lambda =$ const.) dans l'élément linéaire (16) de S, on voit d'ailleurs qu'à toute surface S applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire (16), on peut associer ∞^1 congruences de sphères concentriques arbitrairement déformables du type étudié (on ne regarde toujours pas comme distinctes deux congruences dont l'une se déduit de l'autre en ajoutant une constante aux carrés des rayons des sphères qui constituent cette dernière). Pour l'une quelconque de ces ∞^1 congruences, ρ et R ont pour expressions

$$\begin{cases} \rho = \lambda \int U\,du, \\ R = \sqrt{2\lambda \int U\,du} = k\sqrt{\int U\,du} \end{cases} \qquad (\lambda,\ k = \text{const. arb.}). \tag{18}$$

Les congruences des cordes de contact des ∞^1 congruences de sphères qui viennent d'être déterminées sont susceptibles d'une construction géométrique simple que nous allons mettre en évidence en calculant $\overline{PI}$, P étant le centre de la sphère génératrice Σ et I le point où la corde de contact (MM') correspondante perce le plan tangent à la déférente S en P. Sur S, les courbes $v =$ const. sont les déformées des méridiens de l'une des surfaces de révolution sur lesquelles S est applicable, et la droite PI est la tangente au point P à la déformée de méridien passant par ce point. On a vu au n° 2 que

$$\overline{PI} = \sqrt{\Delta\rho}.$$

Remplaçons ρ par son expression (17); avec la forme (16) du ds^2 de S, on a

$$\Delta\rho = \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2,$$

et, par suite,

$$\overline{PI} = \frac{d\rho}{du},$$

soit, en tenant compte de (18),

$$\overline{PI} = \lambda U.$$

Si l'on remarque que U n'est autre chose que la distance, à l'axe de révolution, de l'homologue de P dans l'une des déformées révolutives de S, on peut définir ainsi la congruence normale de contact la plus générale arbitrairement déformable avec la déférente :

Soit S une surface quelconque de révolution d'axe Δ. Désignons par P l'un quelconque de ses points; sur la tangente en P au méridien de S passant par ce point, portons (dans un sens ou dans l'autre) une longueur $\overline{PI}$ proportionnelle à la distance du point P à l'axe Δ, puis élevons en I la perpendiculaire D au plan tangent en P à S. L'ensemble des droites D ainsi obtenues, supposées invariablement liées aux plans tangents correspondants, donne, par déformation arbitraire de S, la congruence la plus générale du type envisagé.

Dans le cas particulier où S est une sphère, la construction fournie par l'énoncé précédent se simplifie : les congruences des droites D dont il est question dans l'énoncé général sont les gerbes obtenues *en abaissant d'un point fixe quelconque de l'espace les perpendiculaires aux différents plans tangents à la sphère.*

Nous devons faire ici la remarque suivante. Considérons le problème de la recherche des congruences rectilignes normales dont les différents rayons, supposés perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S et invariablement liés à ces plans tangents, ne cessent de constituer une congruence normale lorsque S se déforme arbitrairement en les entraînant. Ce problème n'est pas nouveau; la première solution en a été donnée par Ribaucour (*loc. cit.*) : S est une surface applicable sur une surface de révolution, et les congruences normales associées à S arbitrairement déformables avec S *sont précisément fournies par la construction à laquelle nous avons été conduits plus haut.* Notre étude montre donc que les congruences normales dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S (obligatoirement applicable sur une surface de révolution) et invariablement liés à ces plans tangents, qui restent normales lorsqu'on déforme S arbitrairement, *sont nécessairement les congruences des cordes de contact d'enveloppes de sphères admettant* S *pour déférente.*

Nous reviendrons au numéro suivant sur ce dernier résultat. Le cas où S est une sphère en offre une vérification directe immédiate : Les congruences normales arbitrairement déformables associées à S étant les gerbes issues des différents points de l'espace, il est clair que chacune de ces congruences est congruence de contact pour l'enveloppe des sphères centrées sur S et passant par le sommet de la gerbe. Pour les surfaces de révolution autres que la sphère, le résultat précédemment énoncé n'était nullement évident.

Dans l'expression (18) du rayon de la sphère génératrice d'une enveloppe admettant pour congruence des cordes de contact une congruence arbitrairement déformable avec la déférente S (supposée amenée à avoir la forme de révolution), $\int_{u_0}^{u} U\,du$ représente, au facteur 2π près, l'aire de la zone limitée à un parallèle fixe de S et au parallèle passant par le centre de la sphère génératrice. Le résultat de la recherche que l'on vient de faire peut donc être présenté sous la forme suivante :

Les enveloppes de sphères à congruences des cordes de contact normales arbitrairement déformables avec la déférente s'obtiennent, en centrant en chaque point P *d'une surface quelconque de révolution* S, *une sphère dont le carré du rayon est proportionnel à l'aire de la zone limitée, sur* S, *par un parallèle fixe quelconque et le parallèle (variable) du point* P.

6. *Remarques et rapprochements.* — Le résultat du numéro précédent, suivant lequel les congruences normales dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents à une surface S restant normales par déformation arbitraire de S, sont les congruences de contact d'enveloppes de sphères centrées sur S, est d'autant plus remarquable qu'il cesse d'avoir lieu, si au lieu d'une déformation *arbitraire* de S, on en envisage une déformation *continue* (et à plus forte raison *finie*). Il n'est pas exact que si une congruence normale (C), dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents d'une surface S, reste normale au cours d'une déformation simplement continue de S, (C) est *nécessairement* congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur S. Il n'est même pas exact, et ce résultat entraîne évidemment le précédent, que *l'ensemble* des congruences normales dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S qui restent normales au cours d'une déformation continue de S, est nécessairement constitué par des congruences de contact relatives à S. On peut s'en rendre compte par le calcul. Nous préférons nous borner à signaler l'inexactitude annoncée sur un exemple, que nous emprunterons à une étude antérieure sur les surfaces minima (1).

Envisageons une surface minima quelconque S, et une congruence normale quelconque (C) admettant S pour enveloppée moyenne (enveloppe des plans médiateurs des segments focaux). Supposons chaque rayon D de (C) invariablement lié au plan tangent correspondant de S (qui touche S en P). Soumettons S à la déformation continue qui la transforme en ses différentes *associées* S_α (α = angle d'association). (C) ne cesse pas, au cours de cette déformation, d'être normale et d'avoir S_α pour enveloppée moyenne (*voir* le Mémoire cité du *Bulletin des Sciences mathématiques*). Si l'ensemble des congruences

(1) P. VINCENSINI, *Sur les surfaces minima* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LIII, mars 1929).

normales admettant S *pour enveloppée moyenne* était *identique* à l'ensemble des congruences *normales permanentes dans la déformation continue envisagée de* S, on pourrait conclure dans le sens indiqué, car cet ensemble de congruences normales ne saurait être un ensemble de congruences de contact pour des enveloppes de sphères centrées sur S étant donné que les *seules* déférentes possibles pour de tels ensembles arbitrairement déformables sont les surfaces moulures cylindriques (n° 4), alors que S est la *surface minima* la plus générale. Nous allons voir que l'identité en question est facile à établir.

Soit (C) une congruence normale dont le rayon générateur D est perpendiculaire au plan tangent en P à une surface minima S et perce le plan tangent en I, et supposons que cette congruence reste normale lorsque S se déforme continûment en restant minima. Si l'on mène par un point fixe O de l'espace le vecteur $\overrightarrow{OH}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$, puis par H la parallèle Δ à D, l'ensemble des droites Δ forme une congruence (Γ) évidemment normale. Déformons continûment S, et transformons-la en l'une quelconque S_α de ses associées. Supposons en outre S_α placée de façon que les normales en deux points correspondants quelconques de S et S_α soient parallèles; deux éléments linéaires homologues feront alors l'angle α. Il est clair qu'après la déformation considérée, le rayon Δ de la congruence (Γ), qui est restée normale, a tourné de l'angle α autour de sa parallèle issue de O. La congruence normale (Γ) jouit donc de cette propriété que si chacun de ses rayons tourne d'un angle déterminé, dans un sens déterminé, autour de sa parallèle issue d'un point fixe de l'espace, elle reste normale. La propriété énoncée *caractérise* les congruences normales admettant pour enveloppée moyenne le point O. (Γ) *est donc une congruence à enveloppée moyenne point* (*le point O*). Or, étant données une surface *quelconque* S et une congruence (N) admettant cette surface pour enveloppée moyenne, si (Γ) est une congruence admettant pour enveloppée moyenne un point fixe O, si l'on établit une correspondance par rayons parallèles entre (N) et (Γ), et si l'on déplace chaque rayon de (N) par la translation $\overrightarrow{OH}$ [H étant la projection orthogonale de O sur le rayon correspondant de (Γ)], les nouvelles droites obtenues *forment une congruence admettant la même enveloppée moyenne* S *que* (N) (¹).

Si nous effectuons la construction indiquée dans la proposition qui vient d'être rappelée, en prenant pour (N) la congruence des normales à la surface minima S considérée plus haut, laquelle admet évidemment pour enveloppée moyenne S, et pour (Γ) la congruence ainsi dénommée plus haut (ensemble des droites Δ), nous obtenons la congruence normale (C) restant normale par

(¹) Pour cette proposition, on peut voir, en dehors du Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques* déjà cité, un Mémoire de la *Société mathématique de Moscou : Sur une transformation des congruences rectilignes et les invariants associés*, t. 40, 1933, p. 467.

déformation continue de S envisagée au début. (C) a donc pour enveloppée moyenne S, et l'on peut énoncer ce résultat :

Toute congruence normale dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents à une surface minima et invariablement liés à ces plans tangents, qui reste normale au cours de la déformation continue dont S *est susceptible, est une congruence admettant* S *pour enveloppe moyenne.*

Ce dernier résultat établit l'identité annoncée plus haut. On en déduit, comme on l'a expliqué, que le fait, pour une congruence normale dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface S et invariablement liés à ces plans, de rester normale au cours d'une déformation *simplement continue* de S, n'entraîne pas comme conséquence *nécessaire* que la congruence soit *de contact* pour une enveloppe de sphères centrées sur S. La nécessité n'a lieu que dans le seul cas où la déformation dont il est question est une déformation *arbitraire* de S.

Nous allons maintenant, pour terminer cette étude, revenir sur le problème de la détermination des enveloppes de sphères à congruences de contact normales relatives à une déférente déterminée S. Ce problème est en relation avec le problème de la recherche des systèmes triples orthogonaux dont S fait partie, ou encore de celui de la détermination des systèmes cycliques normaux à S. Le lien est connu, mais il convient que nous l'examinions à la faveur des résultats qui précèdent, et plus spécialement de certains résultats du n° 2.

L'équation définissant les enveloppes de sphères en question est l'équation (11) du n° 3

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

(11) n'est autre que l'équation (de Cayley) qui définit la portion de normale $\varepsilon\rho$ ($\varepsilon =$ constante infinitésimale) à S comprise entre S et une surface infiniment voisine dans une famille de Lamé, c'est-à-dire dans une famille faisant partie d'un système triple orthogonal.

Les cas où l'équation de Cayley relative à une surface S admet des solutions permanentes par déformation de S, correspondent aux cas de permanence des enveloppes de sphères de déférente S à congruences de contact normales, étudiés aux n^{os} 4 et 5. Le cas où l'équation de Cayley admet des solutions permanentes par déformation *arbitraire* de S est bien connu; S est applicable sur une surface de révolution; et en prenant son ds^2 sous la forme $ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2$, la solution permanente, qui est *unique*, est (*voir* le n° 4) $\rho = \int U\,du$ (nous négligeons ici la constante λ puisque les solutions de l'équation de Cayley ne sont définies qu'à un facteur constant près).

Les surfaces déformables avec conservation des lignes de courbure par déformation *finie* ou *continue* donnent évidemment lieu à la permanence de *toutes* les solutions des équations de Cayley correspondantes; mais il résulte de l'étude faite au numéro 3 que ce sont les *seules* surfaces donnant lieu à cette permanence.

L'équation (11) est aussi celle qui définit les systèmes cycliques normaux à S. Chaque solution ρ de cette equation donne un tel système, le cercle C normal à S en l'un quelconque P de ses points étant dans le plan normal en P à la courbe $\rho = \text{const.}$ qui passe par P, et le rayon r de C ayant pour expression

$$r = \frac{-\rho}{\sqrt{\Delta\rho}} \quad (^1).$$

Le cercle C est, comme l'on voit, dans le plan (P, D), D étant le rayon de la congruence normale de contact définie par la même solution ρ de l'équation (11) perpendiculaire au plan tangent en P à S. Nous savons d'ailleurs que si I est le point où D perce le plan tangent, $\overline{PI} = \Delta\rho$, ρ étant lié par la relation $R^2 = -2\rho$ au rayon R de la sphère Σ génératrice de l'enveloppe admettant la congruence de contact envisagée, laquelle sphère touche son enveloppe aux deux points M, M' de D tels que $PM = PM' = R = \sqrt{-2\rho}$. On voit dès lors que $2r \times \overline{PI} = R^2$. Il en résulte une relation remarquable établie par Darboux par une voie différente (2), et à laquelle notre étude nous conduit d'une façon intuitive, entre la congruence (D) et le système cyclique (C) :

Le cercle C *et le rayon* D *relatifs à un même point* P *de* S *sont inverses par rapport à la sphère* Σ.

Il revient évidemment au même de dire que C est circonscrit au triangle (PMM').

Si l'on remplace ρ par $k.\rho$, ce qui revient à multiplier par un facteur constant les rayons des différentes sphères Σ, D est remplacé par la droite D' du plan (P, D) homothétique de D dans l'homothétie (P, k) [*voir* au n° 2 les propriétés de la transformation de ρ en $F(\rho)$]. La congruence (D') est une congruence normale de contact comme (D), et l'expression du rayon r du cercle C du système cyclique associé à $D\left(r = \frac{-\rho}{\sqrt{\Delta\rho}}\right)$ montre que C reste le même pour toutes les congruences (D') ainsi obtenues. Nous dirons dans la suite que le système cyclique (C) et la congruence normale (D) sont *associés*: à chaque congruence normale de contact (D) définie par une solution ρ de (11) est associé un système cyclique (C) normal à S bien déterminé, mais, comme on vient de le voir, à chaque système cyclique (C) normal à S sont associés ∞^1

(1) *Voir* par exemple L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 3e éd., t. II, p. 230.
(2) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 143.

congruences normales de contact (D). Si l'on connaît (D) sans connaître le rayon $R = \sqrt{-2\rho}$ de la sphère Σ dont l'enveloppe admet (D) comme congruence de contact, la détermination de ρ exige (Darboux, *loc. cit.*) la détermination des lignes de courbure de S puis une quadrature; il en est de même si l'on connaît le système cyclique (C) et si l'on veut en déduire les ∞^1 congruences (D) associées.

Si l'on remplace ρ par une fonction quelconque $F(\rho)$ de ρ (autre que $k\rho$), ce qui revient à remplacer le rayon de Σ par une fonction de ce rayon, la congruence normale de contact (D) *reste de contact*, mais *cesse en général d'être normale*, de sorte que les cercles (PMM') associés aux différents rayons de la congruence transformée cessent de former un système cyclique. Il y a exception si S est une sphère. Alors toutes les congruences (D') correspondant aux différentes formes de la fonction $F(\rho)$ sont de contact et normales, et à chacune d'elles est associé un système cyclique (C') normal à S, le rayon r' du cercle C' normal à S en P ayant pour expression

$$r' = \frac{-\rho'}{\sqrt{\Delta\rho'}} = \frac{F(\rho)}{\rho F'(\rho)} r. \tag{19}$$

On voit que les systèmes cycliques normaux à une sphère S jouissent de la propriété que *dans le plan de chaque cercle* C *il existe une infinité d'autres cercles* (*dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument*) *engendrant des systèmes cycliques normaux à* S *et tangents à* C *en l'un des points* P *où* C *coupe normalement* S.

Dans le cas qui vient d'être envisagé où S est une sphère (de rayon un), si U est une surface normale aux rayons d'une congruence (D) associée à un système cyclique (C) normal à S, on a vu, au n° 2, que ρ représente la distance de l'origine O (supposée au centre de S) au plan tangent à U normal au rayon D. Il suffit donc, d'après ce qui précède, pour obtenir les différents systèmes cycliques (C') normaux à S à cercles coplanaires avec les cercles homologues de (C) dont il vient d'être question, de déplacer le plan tangent à U parallèlement à lui-même, suivant la direction de D, d'une quantité uniquement fonction de la distance de ce plan au point O. Si (D') est la congruence des normales à l'enveloppe des nouveaux plans, le système cyclique *associé* à (D') est le plus général des systèmes cycliques (C') normaux à S envisagés plus haut.

Parmi les différents déplacements possibles des plans tangents à U parallèlement à eux-mêmes, il en est un qu'il convient d'envisager plus spécialement comme donnant lieu à une relation extrêmement simple entre les rayons r et r' d'un cercle quelconque de (C) et de son homologue dans (C'). C'est celui où le coefficient de r dans (19) se réduit à une constante k. En exprimant que l'on a

$$\frac{F(\rho)}{\rho F'(\rho)} = k,$$

on est conduit à prendre pour $F(\rho)$, h étant une nouvelle constante,

$$F(\rho) = h\rho^{\frac{1}{k}},$$

et, avec ce choix de la fonction $F(\rho)$ définissant le système cyclique (C') transformé de (C), les rayons de deux cercles homologues sont dans le rapport constant k ($r' = kr$). Nous sommes ainsi conduits à l'énoncé suivant :

Soient U et S une surface et une sphère arbitraires, et (C) le système cyclique normal à S associé à la congruence des normales à U. Conservant les directions des différents plans tangents à U, remplaçons leurs distances au centre O de S par des quantités proportionnelles à une puissance arbitraire (d'ordre $m \neq 1$) de ces distances, et envisageons la surface U_1 enveloppe des nouveaux plans. *Le système cyclique* (C_1) *normal à* S *associé à la congruence des normales à* U_1 *est tel que deux cercles homologues quelconques de* (C) *et* (C_1) (*évidemment tangents au point où ils coupent tous les deux normalement* S) *sont coplanaires, leurs rayons r et r' étant dans un rapport constant* $\left(\frac{r}{r'} = m\right)$.

Le résultat précédent peut être présenté sous la forme suivante, fournissant une propriété de la sphère qu'il nous semble intéressant d'expliciter :

Étant donné un système cyclique quelconque (C) *normal à une sphère* S, *si,* P *étant l'un des points où le cercle générateur* C *du système coupe* S, *on substitue au cercle* C *son homothétique* C' *dans l'homothétie* (P, k), ($k = const.\ arb.$), *on transforme* (C) *en un nouveau système cyclique* (C') *normal à* S.

Ce dernier résultat peut être rattaché aux recherches de G. Darboux (1), complétées par celles de M. A. Demoulin (2). S étant une surface rapportée à ses lignes de courbure, d'élément linéaire $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ et de rayons de courbure principaux R, R', le système cyclique le plus général normal à S est engendré par le cercle Γ représenté par rapport au trièdre principal de S par les deux équations

$$(20)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2\dfrac{E}{\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u}}x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2\dfrac{G}{\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v}}y = 0, \end{cases}$$

où λ est une solution quelconque de l'équation (3)

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R'}\right) = 0.$$

(1) G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.*

(2) A. Demoulin, *Recherches sur les systèmes triples orthogonaux* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, t. XI, 1re partie).

(3) *Voir* A. Demoulin, *loc. cit.*

Si S est une sphère, le cercle Γ engendre un système cyclique pour toutes les formes de la fonction λ, et les équations (20) montrent qu'il suffit de remplacer λ par λ^m ($m = \text{const.}$) pour transformer le cercle Γ en un cercle homothétique dans une homothétie de rapport constant relative au point où Γ coupe normalement S.

La transformation dont il vient d'être question s'applique évidemment aux systèmes cycliques normaux à un plan. Mais dans ce dernier cas on peut vérifier que l'on a l'énoncé plus général suivant :

Étant donné un système cyclique quelconque (C) *normal à un plan fixe* π, *si l'on substitue à chaque cercle* C *un cercle de son plan, centré dans* π, *et formant avec* C *une figure de forme invariable, l'ensemble des cercles* C′ *ainsi obtenus constitue un nouveau système cyclique normal à* π.

Il convient de se demander si le procédé de transformation si simple qui précède des systèmes cycliques normaux à une sphère donne une propriété *caractéristique* de la sphère. Autrement dit si, lorsqu'une surface S est telle que les différents systèmes cycliques qui lui sont normaux jouissent de la propriété de rester cycliques lorsqu'on remplace chaque cercle par le cercle homothétique dans une homothétie de rapport constant, le centre de l'homothétie étant le point où le cercle envisagé coupe normalement S, la surface S est nécessairement une sphère. Nous allons voir qu'il en est effectivement ainsi.

La proposition que nous voulons démontrer est évidemment un cas particulier de la suivante : si une surface S est telle que *tout* système cyclique (C) normal à S puisse être transformé en un autre système cyclique (C′) normal à S, *chaque cercle de* (C′) *étant coplanaire au cercle correspondant* (*normal à* S *au même point*) *de* (C), S est une sphère. C'est cette dernière proposition que nous allons établir.

S étant toujours supposée rapportée à ses lignes de courbure, on a vu au n° 4 que la fonction ρ définissant les différents systèmes cycliques normaux à S est définie par l'équation

$$(GD - ED'')\rho_{12} = 0. \tag{21}$$

Si ρ et ρ′ sont les fonctions définissant deux systèmes cycliques normaux à S à cercles homologues coplanaires, nous avons fait remarquer au n° 2 que la coplanéité exige que ρ′ soit une fonction de ρ [$\rho' = F(\rho)$]. Pour que S jouisse de la propriété énoncée ci-dessus, il faut donc, soit que $GD - ED'' = 0$, ce qui exprime que S est une sphère, soit que l'équation $\rho_{12} = 0$ soit vérifiée simultanément par ρ et par $F(\rho)$. Nous allons montrer que cette dernière hypothèse est inadmissible.

Explicitons l'équation $\rho_{12} = 0$; nous obtenons

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0. \tag{22}$$

En exprimant que (22) est vérifiée simultanément par ρ et $F(\rho)$, on trouve que l'on doit avoir

$$F'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0,$$

ce qui exige, soit que $F(\rho)$ soit de la forme $k\rho+h$ (k, $h=$ const.), cas que nous devons écarter comme transformant, comme l'on sait, le système cyclique défini par ρ en lui-même; soit que l'une des quantités $\frac{\partial\rho}{\partial u}$, $\frac{\partial\rho}{\partial v}$ soit nulle, cas qui doit être écarté aussi comme ne conférant la propriété de l'énoncé qu'à *certains* systèmes cycliques normaux à S et non à *tous*. On a donc nécessairement $GD-ED''=0$, et S est bien une sphère comme on l'avait annoncé.

Il convient de noter que le raisonnement qui précède montre que les *seules* surfaces S, telles que parmi les systèmes cycliques qui leur sont normaux il y en ait qui soient transformables en nouveaux systèmes cycliques coplanaires aux premiers conformément à l'énoncé précédent, sont celles pour lesquelles l'équation (22) admet une solution fonction de u seul ou de v seul. Supposons par exemple que (22) soit vérifiée par $\rho=f(v)$; cela entraîne

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}=0,$$

soit en remplaçant $\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}$ par son expression

$$\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}=0.$$

E est donc une fonction de u seul que l'on peut réduire à l'unité. L'élément linéaire de S a alors la forme

$$ds^2=du^2+G\,dv^2.$$

Sur S, les courbes $v=$ const. sont donc des lignes géodésiques; et comme elles sont aussi par hypothèse lignes de courbure, S est une *surface moulure générale*.

Les plans des cercles des systèmes cycliques normaux à une telle surface, transformables en systèmes cycliques coplanaires normaux à la même surface, sont d'ailleurs les plans tangents à la développable directrice, et la fonction $F(\rho)$ définissant les systèmes cycliques transformés est quelconque.

Il était évident que les surfaces moulures donneraient des solutions du problème posé; mais nous voyons de plus que les solutions ainsi obtenues constituent l'ensemble de toutes les solutions possibles.

En ce qui concerne les systèmes cycliques les plus généraux normaux à une surface quelconque S, les résultats du n° 2 fournissent un procédé de transformation faisant correspondre, à l'un de ces systèmes supposé connu, une infinité d'autres systèmes normaux à la même surface. Soit une surface quelconque S rapportée à ses lignes de courbure (u, v). Les différents couples de

systèmes cycliques (C) et de congruences normales de contact (D) *associés* relatifs à S correspondent aux différentes solutions ρ de l'équation (11) qui, dans le cas actuel, prend la forme du n° 1

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0; \tag{23}$$

et si l'un des deux éléments (C) ou (D) est connu, une quadrature fait connaître la solution correspondante ρ de (23) et entraîne la connaissance de l'autre élément. Cela étant, supposons connu un système cyclique (C) normal à S; construisons l'une quelconque des ∞^1 congruences normales (D) associées, et soient, P le point où le cercle C coupe orthogonalement S, et I le point où le rayon associé D perce le plan tangent à S en P. Menons par O le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ équipollent à $\overrightarrow{PI}$, et par J la parallèle Δ à D. La congruence des droites Δ est évidemment normale puisque (D) l'est, et nous avons vu au n° 2 que cette congruence est congruence des cordes de contact pour une enveloppe de sphères centrées sur S. Il suffit de construire le système cyclique (C′) associé à (Δ) pour obtenir le système cyclique transformé de (C) annoncé. En appliquant la transformation à (C′), on en déduit un nouveau système cyclique (C″) normal à S, et ainsi de suite. A partir d'un système cyclique déterminé normal à S, la construction précédente donne une suite illimitée de nouveaux systèmes cycliques tous normaux à S, et, comme on peut disposer de la position du point O dans l'espace, la transformation qui vient d'être exposée fournit ∞^3 suites analogues.

Le procédé de transformation ci-dessus, dont l'application répétée n'exige que des quadratures, peut évidemment être considéré comme un procédé de transformation (dont l'application n'exige que des quadratures) des solutions de l'équation de Laplace (23).

IDÉAUX DE FONCTIONS ANALYTIQUES

DE

n VARIABLES COMPLEXES

PAR M. HENRI CARTAN.

I. — Introduction (1).

1. Rappelons le théorème célèbre de Poincaré : une fonction f de deux variables complexes, partout méromorphe à distance finie, est le quotient de deux fonctions entières, premières entre elles (c'est-à-dire ne s'annulant simultanément qu'en des points isolés). Pour le démontrer, on prouve l'existence d'une fonction entière admettant pour zéros les pôles de la fonction f, avec les mêmes ordres de multiplicité. Ces pôles forment, on le sait, des variétés à deux dimensions réelles.

Cousin (2) a repris la question pour n variables complexes, en étudiant systématiquement le problème : *construire une fonction holomorphe ayant des zéros donnés dans un domaine donné*. Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par « zéros donnés ». Nous appellerons *donnée de Cousin* dans un domaine D la donnée, en chaque point (3) x de D, d'une fonction f_x holomorphe au point x, ces fonctions satisfaisant à la condition suivante : tout point a de D possède un voisinage V dans lequel f_a est holomorphe et en tout point x duquel le quotient $\frac{f_x}{f_a}$ est holomorphe et $\neq 0$. Cette dernière condition exprime que, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x, les fonctions f_x et f_a engendrent le même *idéal*. Le problème posé par Cousin est alors le suivant : pour toute *donnée de Cousin* dans le domaine D, existe-t-il une

(1) Pour faciliter la lecture, nous avons dressé, à la fin de ce travail, un index des principaux termes employés, en indiquant, pour chacun d'eux, le numéro du paragraphe au cours duquel il est défini.

(2) *Acta Mathematica*, 19, 1895, pp. 1-62.

(3) Nous désignons par une lettre unique un point de l'espace à n dimensions complexes.

fonction f, *holomorphe dans* D, telle que, pour tout point x de D, le quotient $\frac{f}{f_x}$ soit holomorphe et $\neq 0$ au point x?

Cousin s'est borné à étudier ce problème pour une catégorie particulière de domaines, que nous appelons aujourd'hui *polycylindres*. On appelle polycylindre un ensemble de points du type

$$x_1 \in \delta_1, \quad \ldots \quad x_n \in \delta_n,$$

où $\delta_1, \ldots, \delta_n$ désignent des ensembles donnés respectivement dans les plans des n variables complexes $x_1, \ldots, x_n$; ces n ensembles s'appellent les *composantes* du polycylindre. Cousin s'est borné à envisager des *polycylindres ouverts*, donc des polycylindres dont les composantes sont des ensembles ouverts dans les plans des n variables complexes: et il a démontré que le problème posé ci-dessus est possible pour tout polycylindre ouvert dont *toutes les composantes, sauf peut-être une, sont simplement connexes*. C'est ce résultat que nous désignerons ici sous le nom de *théorème de Cousin*: [En réalité, Cousin avait cru démontrer son théorème pour tous les polycylindres ouverts; c'est Gronwall qui a signalé la restriction nécessaire relative à la simple connexion des composantes (*Amer. Math. Soc. Trans.*, 18, 1917).]

Depuis Cousin, on a cherché à étendre ce théorème à des domaines plus généraux (4); on sait aujourd'hui qu'il n'est pas valable pour n'importe quel domaine, mais la recherche systématique des domaines pour lesquels il est valable est un problème difficile que nous laisserons de côté. D'ailleurs les résultats que nous obtiendrons, dans ce Mémoire, sur les idéaux de fonctions holomorphes, permettront, en modifiant légèrement l'énoncé du problème, de le résoudre pour des domaines très généraux (*voir* § XII).

2. Voici une conséquence bien connue du théorème de Cousin. Appelons, dans un domaine D, *variété analytique complexe à* $n-1$ *dimensions* (5) tout ensemble E de points qui peut, au voisinage de chaque point a de D, être défini par une équation $f_a(x_1, \ldots, x_n) = 0$, f_a étant une fonction holomorphe au voisinage de a et non identiquement nulle (le cas où $f_a \neq 0$ au point a n'est pas exclu). On sait que la fonction f_a peut être choisie de manière que toute fonction holomorphe au voisinage de a et qui s'annule identiquement sur E (au voisinage de a) appartienne à l'idéal de base f_a, c'est-à-dire soit de la forme φf_a, φ étant holomorphe au point a; lorsque f_a est ainsi choisie, toute fonction holomorphe

(4) *Voir* par exemple H. CARTAN, *Comptes rendus*, 199, 1934, pp. 1284-1287; K. OKA, *Journ. of Sc. of the Hirosima Univ.*, Series A, vol. 6, 1936, pp. 245-255 et vol. 7, 1937, pp. 115-130; H. BEHNKE, *Jahresbericht der D. Math. Verein.*, 47, 1937, pp. 177-192. *Voir* aussi P. THULLEN, *Math. Ann.*, 111, 1935, pp. 137-157.

(5) Il s'agit de dimensions *complexes*; une telle variété est un sous-ensemble à $2n-2$ dimensions de l'espace de n variables complexes considéré comme espace réel à $2n$ dimensions.

en un point x assez voisin de a, et qui s'annule identiquement sur E au voisinage de x, a la forme ζf_x, ζ étant holomorphe au point x. L'ensemble des f_x ainsi associées aux divers points a de D constitue donc une « donnée de Cousin »; par suite, si D est un polycylindre dont toutes les composantes (sauf peut-être une) sont *simplement connexes*, il existe une fonction f, *holomorphe dans* D, qui s'annule en tous les points de E et en ceux-là seulement, et qui jouit de la propriété précise que toute fonction, qui est holomorphe dans D et s'annule identiquement sur E, est *divisible* par f, c'est-à-dire a la forme ζf, ζ étant holomorphe dans D.

Une autre conséquence du théorème de Cousin, moins connue, est la suivante : E désignant une variété analytique complexe à $n-1$ dimensions (dans un polycylindre D dont toutes les composantes, sauf peut-être une, sont simplement connexes), on peut se donner arbitrairement, sur E, les valeurs d'une fonction *holomorphe dans* D, pourvu que ces valeurs constituent la trace, sur E, d'une fonction holomorphe *au voisinage de* E. D'une façon plus précise et plus générale : si, à chaque point x de E, on associe une fonction f_x holomorphe au voisinage de x, et cela de manière que tout point a de E possède un voisinage V tel que, pour tout point x de E situé dans V, f_x et f_a soient égales en tout point de E suffisamment voisin de x, alors il existe une fonction f *holomorphe dans* D, telle que, pour tout point x de E, f et f_x soient égales en tout point de E suffisamment voisin de x. Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème qui sera démontré plus loin (§ V, théorème I).

3. Pour ce théorème, comme pour le théorème de Cousin, le principe de la démonstration est le suivant : pour passer de *données locales* à une *existence globale*, on procède à des assemblages successifs de morceaux, et ceci successivement dans les plans des n variables complexes; c'est ainsi que Cousin lui-même avait procédé. Chaque stade d'assemblage consiste en ce que nous appellerons une *opération élémentaire*. Voici par exemple en quoi consiste l'opération élémentaire qui conduit au théorème de Cousin :

Étant donnés deux polycylindres compacts (*) Δ' et Δ'', qui ont respectivement mêmes composantes dans les plans des $n-1$ dernières variables complexes, et dont l'intersection $\Delta' \cap \Delta''$ est *simplement connexe*, étant donnée d'autre part une fonction $f(x)$ holomorphe et $\neq 0$ en tout point de $\Delta' \cap \Delta''$, il s'agit de

(*) C'est-à-dire *bornés* et *fermés*. Pour qu'un polycylindre

$$x_1 \in \delta_1, \quad \ldots, \quad x_n \in \delta_n$$

soit compact, il faut et il suffit que ses composantes $\delta_1, \ldots, \delta_n$ soient compactes. Pour qu'il soit simplement connexe, il faut et il suffit que ses composantes soient simplement connexes. Quand nous parlons d'un ensemble plan (ouvert ou compact) *simplement connexe*, nous ne sous-entendons pas qu'il soit connexe; nous voulons seulement dire que son complémentaire est connexe.

mettre cette fonction f sous la forme d'un quotient $\frac{f'}{f''}$, f' étant holomorphe et $\neq 0$ en tout point de Δ', et f'' étant holomorphe et $\neq 0$ en tout point de Δ''. Ce problème est *toujours possible* (7); l'affirmation de cette possibilité sera désormais désignée sous le nom de *lemme de Cousin*.

4. Les résultats de Cousin, nous l'avons rappelé, permettent l'étude *globale* des variétés analytiques complexes à $n-1$ dimensions de l'espace à n dimensions, ainsi que l'étude globale des fonctions holomorphes sur ces variétés. Mais rien ne semble avoir été tenté pour *l'étude globale des variétés analytiques complexes à un nombre quelconque de dimensions*. Nous nous proposons, dans ce travail, de combler partiellement cette lacune. Analysons de plus près le problème : nous dirons que, dans un domaine D, un ensemble E est une variété analytique complexe (ou, plus brièvement, une variété analytique) si chaque point a de D possède un voisinage dans lequel l'ensemble E peut être défini comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes. Une telle variété peut-elle être définie *globalement* comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini, ou même infini, de fonctions *holomorphes dans* D? Nous donnerons une réponse partielle à cette question (§§ IX, X et XII). Voici un autre problème : étant donné une variété analytique E dans D, et, en chaque point x de E, une fonction f_x holomorphe en ce point, de manière que tout point a de E possède un voisinage V tel que, pour tout point x de l'intersection $E \cap V$, f_x et f_a soient égales en tout point de E suffisamment voisin de x, existe-il une fonction f *holomorphe dans* D et qui, au voisinage de tout point x de E, coïncide sur E avec la fonction f_x relative à ce point? Nous étudierons, au paragraphe V, ce problème dans un cas qui se révélera important ensuite (*voir* §§ IX et X).

Suivant une idée de K. Oka (8), l'étude d'une fonction holomorphe dans un domaine quelconque (pourvu que ce soit un domaine total d'existence) se ramène, en définitive, à celle d'une fonction holomorphe sur une variété analytique d'un polycylindre compact et simplement connexe (situé dans un espace à un nombre assez grand de dimensions). Or le cas de ces variétés pourra précisément être traité par les méthodes du présent Mémoire (*voir* § X). C'est d'ailleurs dans ce but que j'ai été amené, il y a quelques années, à entreprendre systématiquement *l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes*, alors que le seul cas étudié jusqu'à présent était celui, très particulier, des idéaux qui possèdent une base formée d'une fonction unique (cas étudié par Cousin).

---

(7) Pour le voir, on considère la fonction $\log f(x)$, qui est holomorphe et uniforme dans un voisinage de $\Delta' \cap \Delta''$; considérée comme fonction de x_1, on lui applique la formule intégrale de Cauchy.

(8) *Voir* les Mémoires cités dans la note (4). Cette idée sera exposée au paragraphe X du présent travail.

II. — Idéaux de fonctions holomorphes; modules de fonctions holomorphes à valeurs dans l'espace à q dimensions.

5. Un *idéal* de fonctions holomorphes est, conformément aux définitions générales en usage en Algèbre, un ensemble $\mathfrak{J}$ de fonctions holomorphes satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° la somme de deux fonctions de $\mathfrak{J}$ est une fonction de $\mathfrak{J}$; 2° le produit d'une fonction de $\mathfrak{J}$ par une fonction holomorphe quelconque appartient à $\mathfrak{J}$. Ces deux conditions s'expriment en une seule : quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_p$, en nombre fini, de l'idéal $\mathfrak{J}$, toute combinaison linéaire $c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p$ à coefficients holomorphes appartient à $\mathfrak{J}$.

Mais la définition précédente reste vague si l'on ne précise pas dans quelle région sont envisagées les fonctions. La notion d'idéal sera toujours relative à un ensemble E déterminé de l'espace à n dimensions complexes. Un *idéal sur* E sera, par définition, un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_E$ des fonctions *holomorphes sur* E; j'appelle fonction holomorphe sur E toute fonction définie et holomorphe dans un voisinage de E (ce voisinage n'étant pas fixé à l'avance, mais dépendant de la fonction); deux fonctions sont considérées comme *identiques* s'il existe un voisinage de E dans lequel elles coïncident. Un cas particulier est celui où l'ensemble E est réduit à un point; un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_E$ correspondant s'appellera un *idéal ponctuel.*

6. Une famille $\mathfrak{F}$ quelconque de fonctions holomorphes sur E *engendre* un idéal : l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions de $\mathfrak{F}$, à coefficients dans $\mathcal{O}_E$, forme en effet un idéal sur E, et c'est le plus petit idéal contenant $\mathfrak{F}$. On appelle *base* d'un idéal sur E, tout système *fini* de fonctions de $\mathcal{O}_E$ qui engendre l'idéal. On ignore si un idéal quelconque possède une base; mais on sait qu'un idéal *ponctuel* possède toujours une base ([9]).

Parmi les idéaux sur E, signalons l'idéal-zéro, réduit à la seule fonction identiquement nulle, et l'idéal-unité, identique à $\mathcal{O}_E$. Le premier a une base formée de la fonction zéro, le second une base formée de la fonction 1 (constante un).

Toute fonction holomorphe sur E peut être considérée comme une fonction holomorphe sur n'importe quel ensemble E′ contenu dans E. Il en résulte que *tout idéal sur* E *engendre un idéal sur* E′, lorsque $E' \subset E$; il importe de ne pas confondre ces deux idéaux : le second se compose de toutes les combinaisons linéaires finies, à *coefficients holomorphes sur* E′, des fonctions du premier idéal. Ainsi, un idéal sur E porte en puissance une foule d'idéaux, un sur

([9]) *Cf.* RÜCKERT, *Math. Annalen*, 107, 1933, pp. 259-281. Le lecteur trouvera une démonstration de ce résultat dans l'Appendice I du présent travail.

chaque sous-ensemble de E. Sauf au paragraphe XII, nous ne considérerons que des idéaux sur des polycylindres (ouverts ou compacts); les idéaux ponctuels rentrent dans cette catégorie.

7. Nous aurons besoin d'une notion plus générale que celle d'idéal sur un ensemble E. L'entier q étant donné une fois pour toutes, considérons les systèmes de q fonctions holomorphes sur E; un tel système définit, si l'on veut, une fonction holomorphe sur E, mais à valeurs non plus dans le corps des nombres complexes, mais dans l'espace à q dimensions complexes; pour abréger, nous dirons : *fonction à q dimensions*. Les fonctions à q dimensions, holomorphes sur E, forment un *module* $\mathcal{O}_E^q$ sur l'anneau $\mathcal{O}_E$: la somme de deux éléments F et G de $\mathcal{O}_E^q$ se définit d'une manière évidente, et le « produit » d'un élément F de $\mathcal{O}_E^q$ par un élément f de $\mathcal{O}_E$ est, par définition, l'élément de $\mathcal{O}_E^q$ dont les q composantes (qui sont des éléments de $\mathcal{O}_E$) sont les produits par f des q composantes de F. D'une manière générale, nous appellerons *module à q dimensions sur* E tout sous-module du module $\mathcal{O}_E^q$, c'est-à-dire tout sous-ensemble $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{O}_E^q$ tel que : 1° la somme de deux éléments de $\mathfrak{M}$ appartienne à $\mathfrak{M}$; 2° le produit d'un élément de $\mathfrak{M}$ par un élément quelconque de $\mathcal{O}_E$ appartienne à $\mathfrak{M}$.

Les notions indiquées ci-dessus pour les idéaux s'étendent immédiatement aux modules : *module engendré* (par un système de fonctions à q dimensions), *base* d'un module, module engendré sur E′ par un module sur E (lorsque $E' \subset E$), module ponctuel. On sait que *tout module ponctuel possède une base finie*. Ce « théorème de la base finie » sera étendu, au paragraphe IX, à toute une catégorie de modules sur des polycylindres compacts.

Nous utiliserons les notations suivantes : $\mathfrak{M}$ désignant un module sur E, et x un point de E, $\mathfrak{M}_x$ désignera le module engendré par $\mathfrak{M}$ sur l'ensemble réduit au point x; Δ désignant un ensemble contenu dans E, $\mathfrak{M}_\Delta$ désignera le module engendré par $\mathfrak{M}$ sur Δ.

III. — Généralisation du lemme de Cousin.

8. Avant de voir comment la notion de « donnée de Cousin » (*voir* I, 1) peut se généraliser aux idéaux et aux modules généraux, commençons par indiquer une généralisation du « lemme de Cousin » (I, 3) qui permettra, au paragraphe IX, d'établir les résultats fondamentaux. Le « problème élémentaire » à résoudre est maintenant le suivant :

Étant donnés deux polycylindres compacts Δ' et Δ'', qui ont mêmes composantes dans les plans des variables $x_2, \ldots, x_n$ (mais non dans le plan de x_1), et dont l'intersection Δ est *simplement connexe* (*), on suppose donnée une matrice carrée X (à p lignes et p colonnes, p étant un entier quelconque) dont les éléments sont des fonctions holomorphes sur Δ, et dont le déterminant

est $\neq 0$ en tout point de Δ; pour abréger, nous dirons : une matrice *holomorphe et inversible sur* Δ. Il s'agit de *mettre cette matrice* X *sous la forme d'un produit* $X'.X''^{-1}$, X' *étant une matrice holomorphe et inversible sur* Δ' *et* X'' *une matrice holomorphe et inversible sur* Δ''.

Pour $p = 1$, on retombe sur le problème élémentaire de Cousin (I, 3). Pour p quelconque, *le problème a toujours une solution* : c'est là un résultat que j'ai établi dans un Mémoire antérieur ([10]), et qui jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème fondamental du présent travail (§ IX). Ce résultat sera désigné, dans la suite de ce paragraphe, sous le nom de « lemme de Cousin généralisé ».

Nous ne le démontrerons pas à nouveau. Signalons seulement ici que la démonstration est beaucoup plus délicate pour p quelconque que pour $p = 1$ (cas du lemme de Cousin proprement dit), et qu'il ne servirait à rien de prendre le logarithme de la matrice étudiée X, parce que l'on n'a pas en général $e^{A+B} = e^A . e^B$ lorsque A et B sont des matrices à p lignes et p colonnes ($p > 1$).

9. Voyons maintenant quel parti immédiat l'on peut tirer du « lemme de Cousin généralisé ». Ici se présente une difficulté qui n'existait pas pour $p = 1$: si un idéal $\mathfrak{I}$ sur Δ possède deux bases formées chacune de p fonctions, *il n'est pas certain que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire à coefficients holomorphes sur* Δ *et de déterminant* $\neq 0$ *en tout point de* Δ ([11]). Mais cette difficulté peut être tournée, grâce au résultat suivant :

LEMME I — *Si, sur un ensemble* E *quelconque, on a deux bases*

$$f_1, \ldots, f_{p'} \quad \text{et} \quad g_1, \ldots, g_{p''}$$

d'un même module sur E (module à un nombre quelconque q de dimensions : les fonctions f_i et g_j prennent donc leurs valeurs dans l'espace à q dimensions), *on peut passer de la base formée des* $p' + p''$ *fonctions*

$$f_1, \ldots, f_{p'} \quad \text{et} \quad F_1, \ldots, F_{p''} \quad (\text{où les } F_j \text{ sont identiquement nulles})$$

à la base formée des $p' + p''$ *fonctions*

$$g_1, \ldots, g_{p''} \quad \text{et} \quad G_1, \ldots, G_{p'} \quad (\text{où les } G_i \text{ sont identiquement nulles})$$

par une substitution linéaire à coefficients holomorphes sur E, *de déterminant* $\neq 0$ *en tout point de* E.

([10]) Sur les matrices holomorphes de n variables complexes (*Journal de Math.*, 9e série, 19, 1940, pp. 1-26); *voir* pp. 9 et suivantes.

([11]) Dans le Mémoire cité dans la note ([10]), j'ai donné l'exemple d'un polycylindre Δ simplement connexe de l'espace à $n = 3$ dimensions, et de deux bases formées chacune de $p = 9$ fonctions holomorphes sur Δ, qui engendrent le même idéal, mais sont telles que le passage de l'une à l'autre ne puisse s'effectuer par une matrice holomorphe et inversible sur Δ (*voir* pp. 24-26 de ce Mémoire).

La démonstration se trouve pages 16-17 du Mémoire déjà cité; elle est donnée dans le cas de deux idéaux, mais est valable pour des modules à un nombre quelconque de dimensions sans qu'il y ait un seul mot à changer.

En combinant ce résultat avec le « lemme de Cousin généralisé », on obtient aussitôt [*voir* p. 15 du Mémoire cité dans la note (10)] :

LEMME II. — *Soient deux polycylindres compacts* Δ' *et* Δ'' *qui ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une, et dont l'intersection* Δ *est simplement connexe. Si deux modules de bases finies* (à un même nombre q de dimensions) $\mathfrak{M}'$ *sur* Δ', *et* $\mathfrak{M}''$ *sur* Δ'', *engendrent, sur* Δ, *le même module, alors il existe un module* $\mathfrak{M}$ *de base finie sur la réunion* $\Delta' \cup \Delta''$, *qui engendre* $\mathfrak{M}'$ *sur* Δ' *et* $\mathfrak{M}''$ *sur* Δ''. On peut préciser : si $\mathfrak{M}'$ possède une base de p' fonctions et $\mathfrak{M}''$ une base de p'' fonctions, il est possible de donner à $\mathfrak{M}$ une base de $p' + p''$ fonctions.

Tels sont les résultats préliminaires que mon Mémoire antérieur (10) avait pour but d'établir et qui nous serviront de point de départ dans l'étude des problèmes fondamentaux dont nous allons parler maintenant.

IV. — Problèmes fondamentaux relatifs aux systèmes cohérents de modules ponctuels.

10. Il s'agit d'abord de généraliser la notion de « donnée de Cousin » exposée au paragraphe I (n°1). Une donnée de Cousin, c'est en somme la donnée d'idéaux ponctuels (un idéal ponctuel en chaque point du domaine envisagé) qui satisfont à une condition de *cohérence* qui a été indiquée explicitement, mais ceci dans le cas particulier où les idéaux ponctuels donnés ont chacun une *base formée d'une seule fonction*. Définissons maintenant la notion générale de *système cohérent d'idéaux ponctuels*, ou même de *modules ponctuels*.

DÉFINITION. — Soit E un ensemble quelconque de l'espace à n dimensions complexes, et soit q un entier ≥ 1 donné une fois pour toutes. Supposons qu'à chaque point x de E ait été attaché un module $\mathfrak{M}_x$ (à q dimensions) de fonctions *holomorphes au point* x. Nous dirons que les modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ forment un *système cohérent*, si tout point a de E possède un voisinage V sur lequel existe un module (à q dimensions) qui, en tout point x de l'intersection $E \cap V$, engendre le module ponctuel $\mathfrak{M}_x$.

Remarque. — On sait (12) que si deux modules, sur un voisinage d'un point a, engendrent, au point a, le même module ponctuel, ils engendrent aussi le même module ponctuel en tout point x suffisamment voisin de a. Comme

(12) *Voir*, à la fin de ce travail, l'Appendice I (2e corollaire du théorème α).

d'autre part tout module ponctuel a une base finie (⁹), on voit que si un système de modules ponctuels est *cohérent*, tout point a de E possède un voisinage W sur lequel existe un nombre *fini* de fonctions holomorphes qui engendrent le module $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de $E \cap W$.

Définissons encore la notion de *module associé* à un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ sur E : c'est le module des fonctions, holomorphes sur E, qui appartiennent à $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de E. Enfin, nous appellerons *module associé à un module* $\mathfrak{M}$ (sur E) le module associé au système cohérent des modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ engendrés par $\mathfrak{M}$ aux différents points x de E. Le module associé à $\mathfrak{M}$ contient évidemment $\mathfrak{M}$.

11. La notion de « donnée de Cousin » étant ainsi généralisée par celle de *système cohérent*, comment peut-on espérer généraliser le théorème de Cousin ? Pour simplifier, nous nous bornerons, pour le moment, au cas des polycylindres *compacts* et *simplement connexes*; de ce cas, on peut espérer passer à celui des polycylindres *ouverts* et simplement connexes, grâce à un passage à la limite convenable. Comme ce passage à la limite présente des difficultés supplémentaires, nous ne nous en occuperons pas tout d'abord.

Cela dit, un des premiers problèmes qui se posent est le suivant :

Problème I. — *Étant donné, sur un polycylindre compact et simplement connexe* Δ (¹³), *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$, *existe-t-il, sur* Δ, *un module qui engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en chaque point* x *de* Δ ?

Il est clair que si le problème I a une solution, le module associé au système cohérent est aussi une solution du problème; mais il n'est pas certain, *a priori*, que ce soit la seule. On est ainsi amené à se poser un problème d'*unicité* qui n'était pas à considérer dans le cas d'une « donnée de Cousin »; le voici :

Problème II. — *Si deux modules* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ (au même nombre q de dimensions) *sur un même polycylindre* Δ *engendrent, en chaque point de* Δ, *le même module ponctuel, s'ensuit-il nécessairement que* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ *soient identiques* ?

Or une analyse détaillée (que nous ne donnons pas ici) montre que si l'on savait résoudre par l'affirmative le problème II pour tous les modules *de base finie*, alors on pourrait, grâce au lemme II (§ III, n° 9), par des assemblages successifs de morceaux, résoudre par l'affirmative le problème I. Il semble donc que tout l'effort doive être porté sur le problème II. Or on voit aussitôt qu'il suffirait de savoir résoudre le :

(¹³) La notation Δ désignera désormais toujours un polycylindre compact.

PROBLÈME III. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module (à q dimensions) sur Δ. Si une fonction f (à q dimensions) est holomorphe sur Δ, et si, en chaque point x de Δ, elle appartient au module $\mathfrak{M}_x$ engendré par $\mathfrak{M}$ en ce point, s'ensuit-il nécessairement que la fonction f appartienne au module $\mathfrak{M}$?*

Ce problème peut encore se formuler comme suit : peut-on affirmer que *le module associé à $\mathfrak{M}$ est contenu dans $\mathfrak{M}$* ? Comme ce module associé contient évidemment $\mathfrak{M}$, la solution du problème III signifierait que tout module est identique à son associé.

Or, pour étudier le problème III, on peut se borner au cas où le module $\mathfrak{M}$ a une *base finie*, car *tout module $\mathfrak{M}$, sur un ensemble compact* E, *contient un sous-module de base finie qui engendre, en chaque point x de* E, *le même module ponctuel $\mathfrak{M}_x$* ([14]).

Mais, même dans le cas où $\mathfrak{M}$ a une base finie, la solution du problème III n'apparaît pas clairement. Prenons par exemple l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré, sur Δ, par p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$ qui ne s'annulent simultanément en aucun point de Δ; la constante 1 appartient à l'idéal associé, mais il n'est pas évident qu'elle appartienne à $\mathfrak{I}$, c'est-à-dire que l'on ait une identité

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f_k = 1$$

à coefficients a_k *holomorphes sur* Δ. Il en est pourtant ainsi pour cet exemple particulier [*voir* la démonstration au paragraphe VI (n° 20) : corollaire du théorème II].

12. Si on analyse le problème III dans le cas général, on voit qu'il se ramène à un *problème élémentaire* que voici :

Soient Δ' et Δ'' deux polycylindres compacts qui ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables complexes sauf une. Soient $f, f_1, \ldots, f_p$ des fonctions (à q dimensions) holomorphes sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$ (que l'on peut supposer simplement connexe); supposons que l'on ait, sur Δ', une identité

$$f = \sum_k a'_k f_k$$

([14]) Voici comment on démontre ce fait : tout point a de E possède un voisinage ouvert V dans lequel existe un système *fini* de fonctions de $\mathfrak{M}$ qui, en chaque point x de E$\cap$V, engendrent le module $\mathfrak{M}_x$. Recouvrons E avec un nombre *fini* de tels voisinages (ce qui est possible d'après le théorème de Borel-Lebesgue), et réunissons les systèmes finis de fonctions qui leur correspondent. On obtient un système fini de fonctions de $\mathfrak{M}$, et ce système engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de E.

à coefficients a'_k holomorphes sur Δ', et, sur Δ'', une identité

$$f = \sum_k a''_k f_k$$

à coefficients a''_k holomorphes sur Δ''. Peut-on conclure de là à l'existence d'une identité

$$f = \sum_k a_k f_k$$

à coefficients a_k holomorphes sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$?

Si ce « problème élémentaire » pouvait être résolu par l'affirmative, le problème III pourrait être résolu affirmativement, donc aussi les problèmes I et II. Or, pour aborder le « problème élémentaire », on est conduit aux considérations suivantes : posons $a'_k - a''_k = c_k$; les fonctions c_k sont holomorphes sur l'intersection $\Delta' \cap \Delta''$ et y satisfont à l'identité

$$\sum_k c_k f_k = 0.$$

Considérons, sur tout ensemble E sur lequel les f_k sont holomorphes, le module (à p dimensions) des systèmes de p fonctions c_k (holomorphes sur E) qui satisfont à l'identité précédente; soit $\mathfrak{M}(f_k, \mathrm{E})$ ce module. Et posons-nous le problème suivant :

Problème IV. — *Soient p fonctions holomorphes f_k (à un nombre quelconque q de dimensions) sur un polycylindre compact et simplement connexe Δ. Est-ce que le module $\mathfrak{M}(f_k, \Delta)$ a une base finie, et est-ce qu'il engendre, sur tout polycylindre compact* E *contenu dans Δ, le module $\mathfrak{M}(f_k, \mathrm{E})$? En particulier, engendre-t-il $\mathfrak{M}(f_k, \mathrm{E})$ lorsque* E *est réduit à un point ?*

Si l'on savait répondre affirmativement au problème IV, on saurait du même coup résoudre le « problème élémentaire » ci-dessus. Voici comment. On aurait, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$a'_k - a''_k = c_k = \sum_\alpha \lambda_\alpha C_{k\alpha},$$

les λ_α étant holomorphes sur $\Delta' \cap \Delta''$, et les $C_{k\alpha}$ sur $\Delta' \cup \Delta''$, avec les identités

$$\sum_k C_{k\alpha} f_k = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha.$$

Or, d'après un théorème classique, les λ_α peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha - \lambda''_\alpha.$$

les λ'_α étant holomorphes sur Δ', et les λ''_α sur Δ''. En posant

$$c'_k = \sum_\alpha \lambda'_\alpha C_{k\alpha}, \qquad c''_k = \sum_\alpha \lambda''_\alpha C_{k\alpha},$$

on obtient des c'_k holomorphes sur Δ' et y satisfaisant à $\sum_k c'_k f_k = 0$, des c''_k holomorphes sur Δ'' et y satisfaisant à $\sum_k c''_k f_k = 0$, et l'on a, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$a'_k - a''_k = c'_k - c''_k.$$

Les fonctions a_k égales, sur Δ', à $a'_k - c'_k$, et, sur Δ'', à $a''_k - c''_k$, sont holomorphes sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$ et y satisfont à

$$f = \sum_k a_k f_k,$$

ce qui résout le « problème élémentaire ».

13. Ainsi, tout l'effort doit se porter, semble-t-il, sur le problème IV, dont la solution entraînerait celle de tous les autres. Or le problème IV soulève une *question préliminaire* : les f_k étant holomorphes sur Δ, associons à chaque point x de Δ le module ponctuel $\mathfrak{M}(f_k, x)$ formé des systèmes de p fonctions c_k (holomorphes au point x) telles que $\sum_k c_k f_k = 0$; *ces modules ponctuels forment-ils un système cohérent?* Or c'est là une question que je ne suis pas encore parvenu à résoudre. Serait-elle résolue, que le problème IV ne le serait pas encore; pour y parvenir, on aurait besoin de la solution du problème I, de sorte que les idées qui viennent d'être exposées ont l'air de conduire à un cercle vicieux! En fait, le cercle vicieux peut être évité par une récurrence subtile et compliquée, que je n'exposerai pas ici puisque la question préliminaire est encore pendante.

Si j'ai tenu néanmoins à indiquer les idées qui permettent de relier les différents problèmes les uns aux autres, c'est pour familiariser le lecteur avec des idées et des méthodes que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Il nous reste maintenant à entrer dans le détail technique des notions et des théorèmes qui nous conduiront à une solution partielle des problèmes posés.

V. — Modules purs, modules parfaits.

14. Le problème II du paragraphe précédent nous conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION. — *Un module* $\mathfrak{M}$ (*à q dimensions*) *sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*) *est dit* PARFAIT *si, pour tout polycylindre compact* Δ *contenu dans* D,

tout module à q dimensions (sur Δ) qui engendre en chaque point x de Δ le module $\mathfrak{M}_x$, *est identique au module* $\mathfrak{M}_\Delta$. [Conformément aux notations adoptées, $\mathfrak{M}_x$ désigne le module engendré par $\mathfrak{M}$ au point x, et $\mathfrak{M}_\Delta$ le module engendré par $\mathfrak{M}$ sur Δ.]

Un module parfait sur D engendre évidemment un module parfait sur tout polycylindre D′ (compact ou ouvert) contenu dans D. D'autre part, *un module parfait* $\mathfrak{M}$ *sur un polycylindre compact* Δ *possède une base finie*, puisqu'il existe, sur Δ, un module de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de Δ [*cf.* § IV, note (¹)], module qui est nécessairement identique à $\mathfrak{M}$ puisque $\mathfrak{M}$ est parfait.

Enfin, si $\mathfrak{M}$ est parfait sur D, alors, sur tout polycylindre compact Δ contenu dans D, le module $\mathfrak{M}_\Delta$ est *identique à son associé*, puisque ce dernier engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de Δ.

Définition. — *Un module* $\mathfrak{M}$ *sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*) *est dit* pur *si, pour tout polycylindre compact* Δ *contenu dans* D, *le module* $\mathfrak{M}_\Delta$ *est identique à son associé.* Il est clair qu'un module pur sur D engendre, sur tout polycylindre D′ contenu dans D, un module pur.

D'après ce qui précède, tout module parfait est pur. J'ignore si la réciproque est exacte (*voir*, à ce sujet, le lemme IV, § VII, n° 22); il se peut même que tous les modules soient parfaits. Mais, dans l'ignorance de ce fait, j'ai été obligé d'introduire les notions précédentes.

15. Nous allons résoudre, pour tous les *modules purs*, un problème qui a été soulevé dans l'introduction (§ I, n° 2).

Théorème I. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *un module pur* (*à q dimensions*) *sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*). *Supposons attachée, à chaque point x de* D, *une fonction* f_x (*à q dimensions*) *holomorphe au point x, et cela de manière que tout point a de* D *possède un voisinage* V *satisfaisant aux conditions suivantes :* 1° f_x *est holomorphe sur* V ; 2° *pour tout point x de* $D \cap V$, *la différence* $f_x - f_a$ *appartient, au point x, au module* $\mathfrak{M}_x$ *engendré par* $\mathfrak{M}$. *Dans ces conditions, il existe une fonction f* (*à q dimensions*) *holomorphe sur* D, *et telle que, pour tout point x de* D, *la différence* $f - f_x$ *appartienne, en ce point, au module* $\mathfrak{M}_x$.

Corollaire. — $\mathfrak{I}$ étant un idéal *pur* sur D, désignons par A la variété de cet idéal, c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions de $\mathfrak{I}$. Si une fonction φ est définie et holomorphe sur un voisinage de A, il existe une fonction *f holomorphe sur* D et *égale à* φ *en tout point de* A.

Nous allons démontrer le théorème I en supposant d'abord D *compact*. D'après l'hypothèse, et en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, on peut

recouvrir D avec un nombre fini d'ensembles ouverts V_i, et associer à chaque V_i une fonction g_i (à q dimensions, holomorphe dans V_i), de manière que, pour tout x de D qui appartient à V_i, la différence $f_x - g_i$ appartienne, au point x, au module $\mathfrak{M}_x$. Il en résulte qu'on peut recouvrir chaque composante δ_k de D ($k = 1, \ldots, n$) avec un nombre fini d'ensembles compacts δ_{ik} ($i = 1, 2, \ldots$) contenus dans δ_k, et, à chaque polycylindre

$$x_1 \in \delta_{i_1 1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n},$$

attacher une fonction holomorphe sur ce polycylindre, telle que, pour tout point x de ce polycylindre, cette fonction soit congrue, au point x, à la fonction f_x suivant le module $\mathfrak{M}_x$. Désignons par ε_{jk} la réunion (dans le plan de la variable x_k) des j ensembles $\delta_{1k}, \ldots, \delta_{jk}$. Nous démontrerons d'abord le théorème non pour le polycylindre D, mais pour le polycylindre

$$x_1 \in \varepsilon_{j1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n};$$

la démonstration se fera par récurrence sur j, en prouvant que si le théorème est vrai pour le polycylindre Δ'

$$x_1 \in \varepsilon_{j-1,1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n},$$

et pour le polycylindre Δ''

$$x_1 \in \delta_{j1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n},$$

il est vrai pour leur réunion

$$x_1 \in \varepsilon_{j1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n}.$$

Cela fait, on voit que le théorème sera établi pour le polycylindre

$$x_1 \in \delta_1, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n}.$$

En procédant ensuite de même, successivement dans les plans des variables $x_2, \ldots, x_n$, on prouvera le théorème pour

$$x_1 \in \delta_1, \qquad x_2 \in \delta_2, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_n,$$

c'est-à-dire pour le polycylindre D. C'est là le procédé d'assemblages successifs employé déjà par Cousin. Ainsi, on est ramené à « *l'opération élémentaire* » suivante : Δ' et Δ'' désignant deux polycylindres compacts dont toutes les composantes, sauf une, sont les mêmes, on a une fonction g' holomorphe sur Δ', une fonction g'' holomorphe sur Δ'', et cela de manière que, en tout point x de l'intersection $\Delta' \cap \Delta''$, la différence $g' - g''$ appartienne au module $\mathfrak{M}_x$. Il s'agit de fabriquer une fonction unique g, holomorphe sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, congrue à g' en tout point x de Δ' (suivant $\mathfrak{M}_x$), et congrue à g'' en tout point x de Δ'' (suivant $\mathfrak{M}_x$).

Or la solution de ce problème est immédiate. Sur $\Delta' \cap \Delta''$, la différence $g' - g''$ appartient au module $\mathfrak{M}_\Delta$, puisque $\mathfrak{M}$ est *pur*. On a donc

$$g' - g'' = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_\alpha,$$

les φ_α (en nombre fini) appartenant à $\mathfrak{M}$, et les c_α étant holomorphes sur $\Delta' \cap \Delta''$. Or on a

$$c_\alpha = c'_\alpha - c''_\alpha.$$

c'_α étant holomorphe sur Δ' et c''_α sur Δ''; d'où, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$g' - \sum_\alpha c'_\alpha \varphi_\alpha = g'' - \sum_\alpha c''_\alpha \varphi_\alpha.$$

La fonction égale, sur Δ', au premier membre de cette égalité, et égale, sur Δ'', au second membre, est une fonction g holomorphe sur $\Delta' \cup \Delta''$, qui fournit une solution du problème. Le théorème I est donc démontré dans le cas où D est compact.

16. Supposons maintenant que le polycylindre D soit *ouvert*. D est réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts D_i à chacun desquels on peut appliquer le théorème. Il existe donc, sur D_i, une fonction holomorphe g_i qui est, en chaque point x de D_i, congrue à la fonction f_x de l'énoncé, suivant le module $\mathfrak{M}_x$. Naturellement, on peut ajouter à g_i une fonction arbitraire du module $\mathfrak{M}$. Nous allons profiter de cette circonstance pour montrer que l'on peut choisir les g_i de manière à avoir

$$(1) \qquad |g_{i-1}(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{2^i} \qquad \text{pour tout } x \text{ de } D_i.$$

En effet, supposons déjà choisies $g_1, \ldots, g_i$, et montrons qu'on peut choisir g_{i+1}. La fonction g_{i+1} étant d'abord une solution quelconque du problème relatif à D_{i+1}, la différence $g_{i+1} - g_i$ appartient au module engendré par $\mathfrak{M}$ sur D_i, puisque $\mathfrak{M}$ est pur; on a donc

$$g_{i+1} - g_i = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_\alpha.$$

les φ_α (en nombre fini) appartenant à $\mathfrak{M}$, et les c_α étant holomorphes sur D_i. Or toute fonction holomorphe sur D_i peut être uniformément approchée par une fonction holomorphe sur D (résultat classique); si l'on applique ceci aux fonctions c_α, on voit qu'on peut retrancher de g_{i+1} une fonction du module $\mathfrak{M}$, de manière que la différence de cette nouvelle fonction et de g_i soit arbitrairement petite sur D_i. Et ceci prouve notre assertion.

Les inégalités (1) étant maintenant supposées vérifiées, il est clair que, au voisinage de tout point de D, les fonctions g_i sont définies et holomorphes, et

convergent uniformément. Leur limite définit donc une fonction *f holomorphe sur* D. Cette fonction *f* satisfait aux conditions du théorème I ([15]), qui est ainsi démontré dans tous les cas.

VI. — Idéaux qui ont une base de p fonctions et dont la variété est à $n-p$ dimensions.

17. Nous dirons que la variété d'un idéal $\mathfrak{I}$ (sur un ensemble E de l'espace à n dimensions) est à $n-p$ dimensions si, en tout point x de E où s'annulent toutes les fonctions de $\mathfrak{I}$, les composantes irréductibles ([16]) de la variété de l'idéal ponctuel $\mathfrak{I}_x$ sont toutes à $n-p$ dimensions. En particulier, tout idéal dont la variété est *vide* (c'est-à-dire tel que ses fonctions n'aient aucun zéro commun) doit être considéré comme un idéal dont la variété a $n-p$ dimensions.

En général, p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$ (il s'agit de fonctions à une dimension, c'est-à-dire de fonctions à valeurs complexes) engendrent un idéal dont la variété V jouit de la propriété suivante : en chaque point de V, chaque composante irréductible ([16]) de B a *au moins* $n-p$ dimensions. Nous supposerons désormais que $f_1, \ldots, f_p$ sont telles que chaque composante irréductible ait *exactement* $n-p$ dimensions, et ceci en tout point de V.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit, sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*) *de l'espace à n dimensions, un idéal* $\mathfrak{I}$ *dont la variété est à* $n-p$ *dimensions et qui possède une base formée de p fonctions. Si une fonction g, holomorphe sur* D (*et à valeurs complexes*), *appartient, en chaque point x de* D, *à l'idéal ponctuel* $\mathfrak{I}_x$ *engendré par* $\mathfrak{I}$ *au point x, alors g appartient à* $\mathfrak{I}$. Autrement dit : *l'idéal* $\mathfrak{I}$ *est identique à son associé.*

En appliquant ce théorème à tous les polycylindres compacts contenus dans D, on voit que *l'idéal* $\mathfrak{I}$ *est pur; on peut donc appliquer le théorème* I *à l'idéal* $\mathfrak{I}$.

18. Nous établirons d'abord un lemme :

Lemme III. — *Soient p fonctions* $f_1, \ldots, f_p$ (*à valeurs complexes*) *holomorphes sur un ensemble ouvert* E. *Si la variété de l'idéal* $\mathfrak{I}$ *de base* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est à* $n-p$ *dimensions, il existe p combinaisons linéaires* $g_1, \ldots, g_p$ *de* $f_1, \ldots, f_p$,

---

([15]) Nous admettons ici le résultat suivant : si une suite de fonctions, holomorphes dans un voisinage fixe d'un point x, converge uniformément dans ce voisinage, et si les fonctions de la suite appartiennent, au point x, à un même module ponctuel, la fonction limite appartient aussi à ce module. Ce fait sera établi dans l'Appendice I de ce travail (premier corollaire du théorème α).

([16]) Il s'agit d'*irréductibilité en un point*. *Voir* l'Appendice II de ce travail.

à coefficients constants et linéairement indépendantes, telles que la condition suivante soit remplie : pour tout système de q fonctions distinctes $(1 \leq q \leq p)$ *prises parmi* $g_1, \ldots, g_p$, *la variété des zéros communs à ces q fonctions est à* $n - q$ *dimensions.*

Considérons la proposition suivante : « moyennant l'hypothèse du lemme, il existe r combinaisons $g_1, \ldots, g_r$ de $f_1, \ldots, f_p$, à coefficients constants et linéairement indépendantes, telles que, pour tout système de q fonctions distinctes $(1 \leq q \leq r)$ prises parmi $g_1, \ldots, g_r$, l'ensemble des zéros communs à ces q fonctions soit à $n - q$ dimensions ». Nous allons prouver cette proposition *par récurrence sur l'entier* $r \leq p$; pour $r = p$, on obtiendra le lemme. Or la proposition est vraie pour $r = 1$, car, si toutes les combinaisons linéaires (à coefficients constants) de $f_1, \ldots, f_p$ étaient identiquement nulles, $f_1, \ldots, f_p$ seraient identiquement nulles, contrairement à l'hypothèse ([17]). Supposons-la vraie pour $r - 1$, et démontrons-la pour r. Soient $g_1, \ldots, g_{r-1}$ des combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$, linéairement indépendantes, et telles que, pour tout système de q fonctions distinctes $(1 \leq q \leq r - 1)$ prises parmi elles, la variété des zéros communs soit à $n - q$ dimensions. Considérons toutes les variétés que l'on obtient ainsi, ou plutôt toutes les *composantes irréductibles* de ces variétés [il s'agit d'irréductibilité ([18]) sur l'ensemble ouvert E envisagé]. Elles forment une famille dénombrable ([18]). Pour chacune d'elles, les combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ qui s'annulent identiquement sur cette composante forment une variété linéaire à $p - 1$ dimensions au plus. Excluons la famille dénombrable de ces variétés linéaires dans l'espace (à p dimensions) de toutes les combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$; excluons aussi les combinaisons linéaires qui sont combinaisons de $g_1, \ldots, g_{r-1}$ seulement. Il reste des combinaisons non exclues; si g_r désigne l'une d'elles, le système $(g_1, \ldots, g_{r-1}, g_r)$ satisfait à la condition voulue, et la proposition est demontrée.

19. Le lemme III étant ainsi établi, abordons la démonstration du théorème II. Nous utiliserons le résultat suivant, relatif aux *idéaux ponctuels* : si, en un point, le produit fg de deux fonctions holomorphes appartient à un idéal, et si f ne s'annule identiquement sur aucune des composantes irréductibles de la

---

([17]) Ce raisonnement suppose implicitement que l'ensemble E est *connexe*. S'il ne l'est pas, on peut raisonner ainsi : pour chacune de ses composantes connexes, l'ensemble des combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ qui sont identiquement nulles sur cette composante constitue une variété linéaire à $p - 1$ dimensions au plus; comme les composantes connexes forment une famille dénombrable, on doit exclure de l'espace (à p dimensions) des combinaisons linéaires une famille dénombrable de variétés linéaires à $p - 1$ dimensions au plus; il reste au moins une combinaison non exclue, c'est-à-dire une combinaison qui, égalée à zéro, définit une variété analytique à $n - 1$ dimensions.

([18]) *Voir* l'Appendice II de ce travail.

variété de l'idéal, alors g *appartient à l'idéal* ([19]). Cela posé, nous établirons le théorème II par *récurrence sur l'entier* p. Il est vrai pour $p=1$, car si une fonction g, holomorphe sur D, est divisible par f (holomorphe sur D) en chaque point de D, g est globalement divisible par f. Supposons alors le théorème vrai pour $p-1$, et démontrons-le pour p. Soient $g_1, \ldots, g_p$ les combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ définies au lemme III; les fonctions $g_1, \ldots, g_p$ servent de base à l'idéal $\mathfrak{J}$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal (sur D) de base $g_2, \ldots, g_p$; le théorème II s'applique à l'idéal $\mathfrak{J}$, dont la variété est à $n-p+1$ dimensions. Il reste à montrer que si une fonction g, holomorphe sur D, se met. au voisinage de chaque point x de D, sous la forme

$$g=\sum_{k=1}^{p} a_x^k g_k \tag{1}$$

(dans a_x^k, la lettre k désigne un indice, la lettre x indique qu'il s'agit d'une fonction *holomorphe au point* x), g peut se mettre sous la forme

$$g=\sum_{k=1}^{p} a^k g_k,$$

$a^1, \ldots, a^p$ étant *holomorphes sur* D.

Or, soit V un voisinage ouvert du point x, dans lequel les a_x^k soient holomorphes et satisfassent à (1). En tout point y de $D \cap V$, la fonction $(a_x^1 - a_y^1) f_1$ appartient à l'idéal $\mathfrak{J}_y$, et par suite $a_x^1 - a_y^1$ appartient à $\mathfrak{J}_y$ (puisque f_1 ne s'annule identiquement sur aucune des compostantes irréductibles de la variété de $\mathfrak{J}_y$). On peut donc appliquer le théorème I à l'idéal pur $\mathfrak{J}$ et aux fonctions a_x^1 attachées aux divers points x de D : d'où l'existence d'une fonction a^1 *holomorphe sur* D et telle que, en tout point x de E, $a^1 - a_x^1$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{J}_x$. Alors la différence $g - a^1 g_1$ appartient à $\mathfrak{J}_x$ en tout point x de D; et, comme le théorème à démontrer est vrai pour l'idéal $\mathfrak{J}$, il s'ensuit que $g - a^1 g_1$ est combinaison linéaire de $g_2, \ldots, g_p$ à coefficients holomorphes sur D. C. Q. F. D.

20. Signalons un cas particulier important du théorème II :

Corollaire du théorème II ([20]). — *Si* p *fonctions* $f_1, \ldots, f_p$ *holomorphes sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*), *et à valeurs complexes, n'ont aucun zéro*

([19]) Voici comment on peut démontrer ce résultat (*cf.* van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. II, 2e éd., p. 37) : tout idéal ponctuel ayant une base finie, il s'ensuit que tout idéal ponctuel $\mathfrak{J}$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux *primaires* $\mathfrak{J}_\alpha$ dont les variétés sont les composantes irréductibles de la variété de $\mathfrak{J}$. Par hypothèse, $fg \in \mathfrak{J}$, donc $fg \in \mathfrak{J}_\alpha$ pour tout α; il faut montrer que $g \in \mathfrak{J}_\alpha$ pour tout α. Or si $g \notin \mathfrak{J}_\alpha$, alors une puissance de f appartient à $\mathfrak{J}_\alpha$, donc f s'annule identiquement sur une des composantes irréductibles de la variété de l'idéal $\mathfrak{J}$. C. Q. F. D.

([20]) *Cf.* p. 22 du Mémoire cité dans la Note ([19]).

commun sur D, *il existe une identité*

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f_k = 1$$

à coefficients a_k *holomorphes sur* D.

En effet, le théorème II est applicable à l'idéal de base $(f_1, \ldots, f_p)$, et à la fonction g identique à *un*.

On peut compléter ce résultat : si *un idéal* $\mathfrak{J}$ (dont on ne suppose pas *a priori* qu'il ait une base finie) *sur un polycylindre compact* Δ *jouit de la propriété que les fonctions de* $\mathfrak{J}$ *n'ont aucun zéro commun sur* Δ, *cet idéal est l'idéal-unité*. En effet l'idéal $\mathfrak{J}$ contient un idéal de base finie qui jouit de la même propriété.

Disons tout de suite qu'on peut compléter le théorème II :

Supplément au théorème II. — *Moyennant les hypothèses du théorème* II, *l'idéal* $\mathfrak{J}$ *de base* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est non seulement pur, mais parfait.*

Nous ne donnerons pas maintenant la démonstration de ce résultat, qui apparaîtra comme cas particulier d'un résultat plus général (§ VIII, n° 27).

VII. — Module dérivé d'un système de fonctions.

21. Soient $f_1, \ldots, f_p$ p fonctions holomorphes (à q dimensions) sur un ensemble E. En chaque point x de E, considérons les systèmes de p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ (à valeurs complexes) *holomorphes au point* x et satisfaisant à l'identité

$$\sum_{k=1}^{p} c_k f_k = 0.$$

Chacun de ces systèmes peut être considéré comme une fonction à valeurs dans l'espace à p dimensions, et il est clair que ces systèmes forment un *module* (ponctuel) à p dimensions. Nous l'appellerons le *module dérivé, au point* x, du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Définition. — Un système de p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ (à q dimensions), holomorphes sur un ensemble compact Δ, sera dit *faiblement dérivable sur* Δ s'il existe, sur Δ, un module $\mathfrak{M}$ (à p dimensions) qui, en chaque point x de Δ, engendre le module dérivé (au point x) du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Il est clair que si un système $(f_1, \ldots, f_p)$ est faiblement dérivable sur Δ, il est aussi faiblement dérivable sur tout ensemble compact contenu dans Δ. D'autre part, si $c_1, \ldots, c_p$ sont les composantes d'un élément quelconque du

module $\mathfrak{M}$ de la définition précédente, on a, sur Δ, l'identité

$$\sum_{k=1}^{p} c_k f_k = 0,$$

puisque cette identité a lieu au voisinage de chaque point de Δ. On voit que : pour que $(f_1, \ldots, f_p)$ soit faiblement dérivable sur Δ, il faut et il suffit que, si $\mathfrak{L}$ désigne le module de *tous* les systèmes $(c_1, \ldots, c_p)$ holomorphes sur Δ et satisfaisant à l'identité précédente, le module $\mathfrak{L}$ engendre, en chaque point x de Δ, le module dérivé (au point x) du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Faisons tout de suite la remarque suivante : si un système $(f_1, \ldots, f_p)$ est faiblement dérivable sur Δ, tout système $(g_1, \ldots, g_p)$, qui se déduit du premier par une substitution linéaire à coefficients holomorphes et à déterminant $\not\equiv 0$ en tout point de Δ, est faiblement dérivable sur Δ.

DÉFINITION. — Un système de p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ (à q dimensions), holomorphes sur un polycylindre compact Δ, sera dit *dérivable sur* Δ s'il existe, sur Δ, un module *pur* $\mathfrak{M}$ (à p dimensions) qui, en chaque point x de Δ, engendre le module dérivé (au point x) du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Il est clair que si un système $(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable sur Δ, il est dérivable sur tout polycylindre compact contenu dans Δ. D'autre part, le module $\mathfrak{L}$ défini plus haut, contient $\mathfrak{M}$, donc est identique à $\mathfrak{M}$ si $\mathfrak{M}$ est pur; autrement dit : le module pur $\mathfrak{M}$ de la définition précédente est *unique* s'il existe; c'est le module $\mathfrak{L}$. On l'appellera alors le *module dérivé*, sur Δ, du système $(f_1, \ldots, f_p)$. On a la propriété importante que voici : *si* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est dérivable sur* Δ, *son module dérivé engendre, sur tout polycylindre compact* Δ' *contenu dans* Δ, *le module dérivé sur* Δ'. En effet, le module dérivé sur Δ étant pur, engendre sur Δ' un module pur.

Faisons encore une remarque : par une substitution linéaire, holomorphe et inversible sur Δ, un système $(f_1, \ldots, f_p)$ *dérivable sur* Δ est transformé en un système dérivable, et les deux systèmes dérivés se déduisent l'un de l'autre par la transformation contragrédiente.

22. LEMME IV. — *Si un module pur, sur un polycylindre compact* Δ, *possède une base faiblement dérivable, ce module est parfait.*

En effet, soit $\mathfrak{M}$ un module pur sur Δ, et soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\mathfrak{M}$, supposée faiblement dérivable sur Δ. Nous voulons montrer que si un module $\mathfrak{N}$, sur Δ, engendre en chaque point x de Δ le même module $\mathfrak{M}_x$ que $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ est identique à $\mathfrak{M}$. Or, puisque $\mathfrak{M}$ est pur, on sait déjà que $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Il reste à montrer que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$; pour cela, soit $\mathfrak{K}$ un sous-module de $\mathfrak{N}$, *ayant une base finie*, et engendrant en chaque point de Δ le même module que $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire

le module ponctuel $\mathfrak{M}_x$; il suffira de montrer que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$. Dans ce but nous montrerons que $\mathfrak{M}$ possède une base de p fonctions dont chacune appartient à $\mathfrak{H}$.

Tout d'abord, soient φ_i les fonctions (en nombre fini) qui servent de base à $\mathfrak{H}$. On a des identités

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{p} u_{ik} f_k,$$

les u_{ik} étant holomorphes sur Δ. D'autre part, en chaque point x de Δ, la fonction f_1 (par exemple) appartient au module $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{M}_x$, d'où

$$f_1 = \sum_i a_i \varphi_i,$$

les a_i étant holomorphes *au point* x. On a donc, au voisinage de x, l'identité

$$\left(\sum_i a_i u_{i1} - 1\right) f_1 + \sum_{k=2}^{p} \left(\sum_i a_i u_{ik}\right) f_k = 0.$$

Le système $(f_1, \ldots, f_p)$ étant, par hypothèse, faiblement dérivable sur Δ, il existe un nombre fini de systèmes $(c_1^\alpha, \ldots, c_p^\alpha)$ holomorphes sur Δ et y satisfaisant aux identités

$$\sum_{k=1}^{p} c_k^\alpha f_k = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha,$$

et tels que $\sum_i a_i u_{i1} - 1$ soit combinaison linéaire des c_1^α à coefficients holomorphes au point x. Il en résulte que les fonctions u_{i1} et c_1^α ne s'annulent pas toutes au point x. Or ce raisonnement vaut pour tout point x de Δ, à cela près que les c_1^α dépendent peut-être du point x. Quoi qu'il en soit, les c_1^α appartiennent à l'idéal $\mathfrak{J}$ des fonctions c_1 (holomorphes sur Δ) telles que $c_1 f_1$ appartienne à l idéal de base $(f_2, \ldots, f_p)$. Ainsi l'idéal $\mathfrak{J}$, engendré par $\mathfrak{J}$ et les u_{i1}, engendre, en chaque point x de Δ, l'idéal-unité; il en résulte (§ VI, n° 20, corollaire du théorème II) l'existence d'une identité

$$\sum_i A_i u_{i1} - 1 = \sum_\alpha B_\alpha c_1^\alpha,$$

où n'interviennent qu'un nombre fini de fonctions c_1^α de $\mathfrak{J}$, et où les coefficients A_i et B_α sont *holomorphes sur* Δ. Alors

$$\left(\sum_i A_i u_{i1} - 1\right) f_1$$

appartient, sur Δ, à l'idéal de base $f_2, \ldots, f_p$; d'où finalement une identité de la forme

$$\sum_i A_i \varphi_i = f_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f_k,$$

à coefficients λ_k holomorphes sur Δ. Posons

$$f_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f_k = f_1' ;$$

les fonctions $f_1', f_2, \ldots, f_p$ constituent une base du module $\mathfrak{M}$, et *la fonction* f_1' *appartient à* $\mathfrak{A}$.

On peut recommencer le même raisonnement, f_2 prenant la place de f_1, et $f_1', f_3, \ldots, f_p$ la place de $f_2, f_3, \ldots, f_p$. En effet, le système $(f_1', f_2, \ldots, f_p)$ se déduit du système $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ par une substitution linéaire, holomorphe et inversible sur Δ; donc il est, lui aussi, faiblement dérivable. Alors on prouve l'existence d'une fonction

$$f_2' = f_2 + \mu_1 f_1' + \sum_{k=2}^{p} \mu_k f_k,$$

qui appartient à $\mathfrak{A}$, et l'on peut prendre $f_1', f_2', f_3, \ldots, f_p$ comme nouvelle base de $\mathfrak{M}$. En poursuivant ainsi, l'on trouvera une base $(f_1', f_2', \ldots, f_p')$ du module $\mathfrak{M}$, et chacune des fonctions de cette base appartiendra à $\mathfrak{A}$. On a donc bien $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$, qui démontre le lemme IV.

23. Voici encore un lemme qui nous sera utile :

LEMME V. — *Soit, sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*), *un module* $\mathfrak{M}$ *qui possède une base finie* $f_1, \ldots, f_p$. *Si cette base est dérivable sur tout polycylindre compact contenu dans* D, *le module* $\mathfrak{M}$ *est identique à son associé. En particulier* (en appliquant le présent lemme aux polycylindres compacts contenus dans D), *le module* $\mathfrak{M}$ *est pur, et par suite* (en appliquant le lemme IV aux polycylindres compacts contenus dans D) *parfait.*

Faisons d'abord la démonstration lorsque D est *compact*. Nous devons montrer ceci : si une fonction f, holomorphe sur D, appartient, en tout point x de D, au module $\mathfrak{M}_x$ engendré par $\mathfrak{M}$ en ce point, alors f appartient à $\mathfrak{M}$. Or, une telle fonction f étant donnée, on peut, comme lors de la démonstration du théorème I (§ V, n° 15), recouvrir chaque composante δ_k de D ($k = 1, \ldots, n$) avec un nombre fini d'ensembles compacts δ_{ik} contenus dans δ_n, et, sur chaque polycylindre

$$x_1 \in \delta_{i_1 1}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n}.$$

trouver p fonctions holomorphes $a_1, \ldots, a_p$ (à valeurs complexes) telles que l'identité

$$f = \sum_{j=1}^{p} a_j f_j$$

ait lieu sur ce polycylindre. On utilise alors la méthode d'assemblages successifs déjà exposée (§ V) : il suffit de savoir résoudre le « problème élémentaire » suivant :

Δ' et Δ'' désignant deux polycylindres compacts dont toutes les composantes, sauf une, sont les mêmes, on a une identité

$$f = \sum_j a'_j f_j \qquad \text{sur } \Delta',$$

et une identité

$$f = \sum_j a''_j f_j \qquad \text{sur } \Delta'' :$$

il s'agit d'en déduire, sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, une identité

$$f = \sum_j b_j f_j$$

à coefficients holomorphes sur $\Delta' \cup \Delta''$. Or nous avons déjà indiqué au paragraphe IV (n° 12), à propos du « problème IV », comment on peut procéder. L'identité, sur $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$,

$$\sum_j (a'_j - a''_j) f_j = 0$$

prouve que

$$a'_j - a''_j = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_j^\alpha,$$

les c_j^α étant holomorphes sur $\Delta' \cup \Delta''$ et y satisfaisant à $\sum_j c_j^\alpha f_j \equiv 0$ pour tout α, et les λ_α étant holomorphes sur Δ. Comme on a

$$\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha - \lambda''_\alpha,$$

λ'_α étant holomorphe sur Δ' et λ''_α sur Δ'', on a, sur Δ,

$$a'_j - \sum_\alpha \lambda'_\alpha c_j^\alpha = a''_j - \sum_\alpha \lambda''_\alpha c_j^\alpha.$$

La fonction b_j égale, sur Δ', au premier membre, et, sur Δ'', au second membre, est holomorphe sur $\Delta' \cup \Delta''$; en outre

$$f = \sum b_j f_j.$$

Et ceci achève la démonstration, au moins dans le cas où le polycylindre donné D est *compact*.

Lorsque D est *ouvert*, il reste à effectuer un passage à la limite. D est réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts D_i, à chacun desquels on peut appliquer le lemme. Il existe donc des b_{ij} holomorphes sur D_i, tels que

$$f = \sum_j b_{ij} f_j \qquad \text{sur } D_i.$$

Naturellement, pour chaque valeur de i, les b_{ij} ne sont pas uniques : on peut leur rajouter des c_j holomorphes sur D_i et tels que $\sum_j c_j f_j = 0$. Nous allons profiter de cette circonstance pour montrer que les b_{ij} peuvent être choisis de manière à avoir

$$(1) \qquad |b_{i+1,j}(x) - b_{ij}(x)| \leq 2^{-i} \qquad \text{pour tout } x \text{ de } D_i,$$

quel que soit j.

En effet, supposons déjà choisis les b_{ij} pour $i \leq r$, et montrons que l'on peut choisir $b_{r+1,j}$ de manière que l'on ait

$$|b_{r+1,j}(x) - b_{rj}(x)| \leq 2^{-r} \qquad \text{pour tout } x \text{ de } D_r.$$

Tout d'abord, il existe des $b_{r+1,j}$ tels que

$$f = \sum_j b_{r+1,j} f_j \qquad \text{sur } D_r,$$

d'où

$$\sum_j (b_{r+1,j} - b_{rj}) f_j = 0 \qquad \text{sur } D_r.$$

Puisque le système $(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable sur D_{r+1}, on a

$$b_{r+1,j} - b_{rj} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_j^\alpha,$$

les c_j^α étant holomorphes sur D_{r+1} et y satisfaisant à

$$\sum_j c_j^\alpha f_j = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha,$$

et les λ_α étant holomorphes sur D_r. Mais les λ_α peuvent être uniformément approchés, sur D_r, par des fonctions μ_α holomorphes sur D_{r+1} ; de sorte qu'en remplaçant $b_{r+1,j}$ par $b_{r+1,j} - \sum_\alpha \mu_\alpha c_j^\alpha$, on arrive à réaliser les inégalités (1) relatives à $i = r$.

Cela étant, les inégalités (1) étant maintenant supposées vérifiées pour tout i, on voit que la suite des b_{ij} ($i = 1, 2, \ldots$) converge, lorsque $i \to \infty$, vers une

fonction b_j *holomorphe sur* D; et, en passant à la limite pour $i \to \infty$, on obtient l'identité

$$f = \sum_j b_j f_j$$

valable dans D tout entier. Ceci achève la démonstration du lemme V.

VIII. — Modules dérivés d'un module donné.

24. Nous allons d'abord montrer :

Si une base finie d'un module $\mathfrak{M}$ (*sur un polycylindre compact* Δ) *est faiblement dérivable sur* D, *toute autre base finie est faiblement dérivable sur* Δ. *Si une base finie d'un module* $\mathfrak{M}$ *est dérivable, toute autre base finie est dérivable.*

En effet, d'après le lemme I (§ III, n° 9), tout changement de base peut s'obtenir par application successive des deux opérations suivantes :

1° ajouter à la base une ou plusieurs fonctions identiquement nulles, ou retrancher de la base une ou plusieurs fonctions identiquement nulles (s'il y en a);

2° effectuer sur la base une substitution linéaire holomorphe et inversible.

Il suffit de vérifier que chacune de ces opérations conserve à la base la propriété d'être faiblement dérivable, ou celle d'être dérivable. Pour l'opération 2°, c'est évident (et cela a déjà été signalé). Pour l'opération 1° : en chaque point, il faut rajouter (ou retrancher) aux composantes $c_1, \ldots, c_p$ de chaque élément du module dérivé, un certain nombre de composantes *arbitraires*; la proposition à démontrer se vérifie alors facilement.

On peut donc définir la notion de *module faiblement dérivable* et celle de *module dérivable*, puisque ces notions sont indépendantes de la base particulière choisie. Lorsqu'on parle de module faiblement dérivable, ou de module dérivable, *il est sous-entendu que le module a une base finie.*

25. Pour définir la notion de *module dérivé d'un module*, il nous faut introduire une *relation d'équivalence* entre modules sur un même ensemble E, que ces modules aient ou non le même nombre de dimensions.

Tout d'abord, deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E seront dits A-*équivalents* s'ils ont le même nombre de dimensions, et si les fonctions f' de $\mathfrak{M}'$ se déduisent des fonctions f de $\mathfrak{M}$ en effectuant, sur leurs composantes, une substitution linéaire homogène fixe (c'est-à-dire la même pour toutes les f), à coefficients holomorphes sur E, de déterminant $\neq 0$ en tout point de E.

Deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E, de dimensions q et q', seront dits B-*équivalents* si, q désignant par exemple le plus petit des entiers q et q', les fonctions

de $\mathfrak{M}'$ sont celles dont les q premières composantes sont celles d'une fonction de $\mathfrak{M}$, et dont les $q'-q$ dernières composantes sont *arbitraires*.

Deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E, de dimensions q et q', seront dits C-*équivalents* si, q désignant par exemple le plus petit des entiers q et q', les fonctions de $\mathfrak{M}'$ sont celles dont les q premières composantes sont celles d'une fonction de $\mathfrak{M}$, et dont les $q'-q$ dernières composantes sont *nulles*.

Enfin, deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E seront *équivalents* (tout court), s'il existe une suite finie de modules sur E

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}_1,\ \ldots\ \mathfrak{M}_k,\ \mathfrak{M}'$$

(dont le premier terme est $\mathfrak{M}$ et le dernier $\mathfrak{M}'$) telle que deux termes consécutifs quelconques de cette suite soient ou A-équivalents, ou B-équivalents, ou C-équivalents. La relation d'équivalence ainsi définie est bien symétrique, réflexive et transitive. Observons que si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E sont équivalents, les modules qu'ils engendrent sur un sous-ensemble quelconque de E sont aussi équivalents. Observons aussi que tout module équivalent à un module pur est pur, à un module parfait est parfait.

De ce qui précède, il résulte que si un module $\mathfrak{M}$ sur un polycylindre compact Δ est dérivable, *les modules dérivés de deux bases de* $\mathfrak{M}$ *sont équivalents*. Car un changement de base pour $\mathfrak{M}$ s'obtient par application successive d'opérations qui conduisent, pour le module dérivé, respectivement à l'A-équivalence et à la B-équivalence. On peut donc définir, à une équivalence près, *le module dérivé d'un module* $\mathfrak{M}$, lorsque $\mathfrak{M}$ est dérivable sur Δ.

26. Montrons maintenant : *si deux modules* $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$, *sur un polycylindre compact* Δ, *sont équivalents, et si l'un d'eux est dérivable, l'autre est aussi dérivable; en outre, les deux modules dérivés* (*dont chacun est défini à une équivalence près*) *sont équivalents.* (On pourra donc dire que l'opération de dérivation d'un module est compatible avec la relation d'équivalence). Il suffit de montrer : si deux modules $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont A-équivalents (resp. B-équivalents, resp. C-équivalents), et si l'un d'eux est dérivable, l'autre est aussi dérivable, et les deux modules dérivés sont équivalents. Or si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont A-équivalents, et si l'on choisit dans $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux bases formées de fonctions homologues, ces bases ont évidemment même module dérivé; donc la proposition est vraie dans ce cas. Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de dimensions q et q' ($q \leqq q'$) sont B-équivalents, choisissons dans celui qui a le moindre nombre de dimensions une base $f^\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots)$, et désignons par $f_1^\alpha, \ldots, f_q^\alpha$ les composantes de chaque f^α; alors l'autre module admet la base formée : 1° des fonctions g^α dont les q premières composantes sont $f_1^\alpha, \ldots, f_q^\alpha$ et les $q'-q$ dernières sont 0; 2° des fonctions $h^\beta(\beta = q+1, \ldots, q')$ dont les composantes h_i^β sont égales à 1 si $i = \beta$, à zéro si $i \neq \beta$. *En chaque point*, le module dérivé de la première base se compose des

systèmes de fonctions $c_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots)$ tels que $\sum_\alpha c_\alpha f^\alpha = 0$; le module dérivé de la deuxième base se compose des systèmes de fonctions c_α et d_β tels que

$$\sum_\alpha c_\alpha g^\alpha + \sum_\beta d_\beta h^\beta = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_\alpha c_\alpha f^\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad d_\beta = 0 \qquad \text{pour tout } \beta.$$

Donc, en chaque point, les modules dérivés sont C-équivalents. Il en résulte aussitôt que si le module $\mathfrak{M}_1$ est dérivable sur Δ, $\mathfrak{M}_2$ est *dérivable sur* Δ, et *vice versa*; et que, par un choix convenable des bases de $\mathfrak{M}_1$ et de $\mathfrak{M}_2$, les deux modules dérivés sont C-équivalents.

Enfin, si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont C-équivalents, on verrait de même que si l'un d'eux est dérivable, l'autre est dérivable; et que, par un choix convenable des bases de $\mathfrak{M}_1$ et de $\mathfrak{M}_2$, les deux modules dérivés sont B-équivalents.

Ainsi la proposition annoncée est démontrée. On verrait de même, plus facilement encore, que *si deux modules* $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *sur un polycylindre compact* Δ *sont équivalents, et si l'un d'eux est faiblement dérivable, l'autre est faiblement dérivable.*

N'envisageons désormais les modules qu'*à une équivalence près*; nous pourrons alors parler de *module dérivable*, de *module dérivé* d'un module donné. $\mathfrak{M}$ étant un module dérivable sur Δ, soit $\mathfrak{M}'$ le module dérivé; il se peut que $\mathfrak{M}$ soit, à son tour, dérivable; nous dirons alors que $\mathfrak{M}$ est deux fois dérivable, et nous désignerons par $\mathfrak{M}''$ le module dérivé de $\mathfrak{M}'$, qui sera dit *module dérivé du second ordre* du module $\mathfrak{M}$. On définit ainsi de proche en proche la notion de *module r fois dérivable* et celle de *module dérivé d'ordre r*. Enfin, nous dirons qu'un module $\mathfrak{M}$ est $r+1$ *fois faiblement dérivable* s'il est r fois dérivable et si son dérivé d'ordre r est faiblement dérivable.

Remarque. — Si Δ se réduit à un point, tout module sur Δ est indéfiniment dérivable.

27. Nous terminerons ce paragraphe en étudiant les modules dérivés successifs d'un idéal $\mathfrak{I}$ qui satisfait aux conditions du théorème II (§ VI, n° 17).

Lemme VI. — *Soit, sur un polycylindre compact* Δ *de l'espace à n dimensions, un idéal* $\mathfrak{I}$ *dont la variété est à* $n-p$ *dimensions et qui possède une base formée de p fonctions. Un tel idéal est indéfiniment dérivable, et tous ses modules dérivés d'ordres* $\geq p$ *sont équivalents à zéro.*

Nous ferons la démonstration pour $p = 5$, à titre d'exemple, pour alléger l'exposé; le lecteur s'assurera qu'elle a un caractère général. Nous allons

d'abord déterminer les modules dérivés successifs de l'idéal $\mathfrak{J}$ *en un point*, d'ailleurs quelconque, du polycylindre Δ. Choisissons une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de l'idéal $\mathfrak{J}$ comme il est dit au lemme III (§ VI, n° 17). Le module dérivé $\mathfrak{J}'$ se compose des systèmes de p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ (holomorphes au point considéré) qui satisfont à l'identité $\sum_{k=1}^{p} c_k g_k = 0$; il contient donc (pour $p=5$) les quatre systèmes

$$(1)\qquad \begin{cases} -g_2 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_3 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\ -g_4 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ -g_5 & 0 & 0 & 0 & g_1 \end{cases}$$

En outre $(c_1, \ldots, c_p)$ étant un système quelconque de $\mathfrak{J}'$, on sait que c_1 appartient à l'idéal de base (g_2, g_3, g_4, g_5); donc tout système de $\mathfrak{J}'$ est la somme d'une combinaison linéaire (à coefficients holomorphes) des quatre systèmes (1) et d'un système tel que $c_1 = 0$. En raisonnant ainsi de proche en proche, on trouve que le module dérivé $\mathfrak{J}'$ possède une base $\mathfrak{B}'$ formée des 10 systèmes (de 5 fonctions chacun)

$$(\mathfrak{B}')\qquad \begin{cases} -g_2 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_3 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\ -g_4 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ -g_5 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & -g_3 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & -g_4 & 0 & g_2 & 0 \\ 0 & -g_5 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & -g_4 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & -g_5 & 0 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & -g_5 & g_4 \end{cases}$$

Un raisonnement analogue prouve que le module dérivé $\mathfrak{J}''$ de la base $\mathfrak{B}'$ possède une base $\mathfrak{B}''$ formée des 10 systèmes (de 10 fonctions chacun)

$$(\mathfrak{B}'')\qquad \begin{cases} -g_3 & g_2 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_4 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_4 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_5 & 0 & -g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_5 & g_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 & -g_3 & 0 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & 0 & g_3 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 & -g_4 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & g_4 & -g_3 \end{cases}$$

A son tour, la base $\mathcal{B}''$ a pour module dérivé $\mathfrak{J}'''$, le module ayant pour base $\mathcal{B}'''$ les cinq systèmes de 10 fonctions

$$(\mathcal{B}''')\quad \left\{\begin{array}{cccccccccc} g_4 & g_3 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & g_3 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & -g_5 & -g_4 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_5 & -g_4 & -g_3 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & -g_4 & -g_3 & -g_2 \end{array}\right.$$

et $\mathcal{B}'''$ a pour module dérivé $\mathfrak{J}^{(4)}$, le module ayant pour base l'unique système de 5 fonctions

$$(\mathcal{B}^{(4)})\qquad g_5,\quad g_4,\quad g_3,\quad g_2,\quad g_1,$$

dont le module dérivé est évidemment *nul*.

Remarquons que les entiers successifs qui s'introduisent : 1, 5, 10, 10, 5, 1, ne sont autres que les coefficients du binome pour la puissance cinquième. Le fait est général.

Puisque le module dérivé $\mathfrak{J}'$ en un point quelconque de Δ a une base $\mathcal{B}$ formée de fonctions *holomorphes sur* Δ, l'idéal $\mathfrak{J}$ est *faiblement dérivable sur* Δ. Il en est de même des modules $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$, $\mathfrak{J}'''$, $\mathfrak{J}^{(4)}$. Pour montrer que $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$, $\mathfrak{J}'''$, $\mathfrak{J}^{(4)}$ sont *dérivables sur* Δ, il reste à montrer que les modules $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$, ..., $\mathfrak{J}^{(5)}$ sont *purs*. Pour $\mathfrak{J}^{(5)}$, c'est trivial puisque le module $\mathfrak{J}^{(5)}$ est nul. Il en résulte que $\mathfrak{J}^{(4)}$ est dérivable sur Δ, donc (lemme V) est pur (et même parfait). Mais alors $\mathfrak{J}'''$ est dérivable sur Δ, donc (lemme V) est pur (et même parfait). En remontant ainsi, on voit que $\mathfrak{J}$ *est parfait*, indéfiniment dérivable, et que tous ses modules dérivés successifs sont $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$, ... sont parfaits.

Nous avons ainsi établi non seulement le lemme VI, mais le *supplément au théorème* II annoncé au § VI (n° 20). Remarquons, en passant, que la démonstration du lemme VI, qui est indépendante du théorème II, fournit une nouvelle preuve de ce théorème.

IX. — Le théorème fondamental.

28. Nous allons pouvoir résoudre, dans un cas particulier, les problèmes posés au paragraphe 4.

Théorème III (théorème fondamental). — *Soit* Δ *un polycylindre compact et simplement connexe de l'espace à* n *dimensions. Soit sur* Δ *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$, *jouissant de la propriété suivante : tout point de* Δ *possède un voisinage compact* V *sur lequel existe un module* $n+1$ *fois faiblement dérivable qui engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* $\Delta \cap V$. *Alors le module* $\mathfrak{F}$, *associé au système cohérent, engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* Δ, *et ce module* $\mathfrak{F}$ *est parfait.*

Remarque. — Le module $\mathfrak{T}$ associé au système cohérent a donc une *base finie*; et c'est *le seul module, sur* Δ, *qui engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* Δ.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, il sera commode d'établir un lemme :

LEMME VII. — *Soit* Δ *un ensemble compact, et soit, sur* Δ, *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$. *Il existe un voisinage ouvert* D *de* Δ, *et un système cohérent sur* D, *qui prolonge le système précédent.*

En effet, recouvrons Δ avec un nombre *fini* d'ensembles ouverts bornés V_i tels que, sur l'adhérence ([21]) $\overline{V_i}$ de chacun d'eux, existe une base finie $\mathfrak{B}_i$ qui, en chaque point x de $\overline{V_i} \cap \Delta$, engendre le module $\mathfrak{M}_x$ du système cohérent donné sur Δ. Montrons l'existence d'un voisinage ouvert D de Δ, tel que, pour chaque point x de D, les bases $\mathfrak{B}_i$ relatives aux divers ensembles V_i qui contiennent x engendrent au point x le même module ponctuel; si $\mathfrak{N}_x$ désigne ce module ponctuel, les $\mathfrak{N}_x$ (où x parcourt D) constitueront un système cohérent dont l'existence établira le lemme.

Or, pour prouver l'existence de D, raisonnons par l'absurde. Si D n'existait pas, on pourrait trouver une suite de points $x^1, \ldots, x^k, \ldots$, ayant pour limite un point a de Δ, et tels par exemple que, pour tout k, x^k appartienne à la fois à V_1 et à V_2, les bases $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ engendrant en x^k des modules différents. Alors a appartient à $\overline{V_1}$ et à $\overline{V_2}$; donc les fonctions de $\mathfrak{B}_1$ et de $\mathfrak{B}_2$ sont holomorphes au point a et y engendrent le même module $\mathfrak{M}_a$; mais on sait (*voir* § IV, n° 10, et Appendice I) que, dans ces conditions, $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ engendrent le même module en tout point suffisamment voisin de a. D'où la contradiction cherchée.

29. Ce lemme étant établi, nous voyons que, dans les hypothèses du théorème III à démontrer, nous pourrons supposer que le système cohérent des $\mathfrak{M}_x$ est donné sur un polycylindre *ouvert* D contenant Δ, et que tout point a de D possède un voisinage compact V (contenu dans D) sur lequel existe un module $n+1$ fois dérivable qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en chaque point de V. Cela étant, nous établirons, par récurrence sur l'entier r ($0 \leq r \leq n$), une série de propositions intermédiaires que voici :

Proposition A_r. — Soit D un polycylindre ouvert de l'espace à n dimensions. Soit, sur D, un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ jouissant de la propriété suivante : tout point a de D possède un voisinage compact V (contenu

([21]) L'*adhérence*, ou *fermeture*, d'un ensemble se compose de la réunion de cet ensemble et de sa frontière.

dans D) sur lequel existe un module pur $\mathfrak{M}$, *r fois faiblement dérivable* ([22]), qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de V. Alors, pour tout polycylindre Δ *compact, simplement connexe*, contenu dans D, *et dont les* $n-r$ *dernières composantes sont ponctuelles*, il existe un voisinage U de Δ (U contenu dans D), et, sur U, un module $\mathfrak{T}$ de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de U.

Proposition B_r. — Mêmes hypothèses que pour la proposition A_r, sauf que le module $\mathfrak{M}$ relatif à chaque V est supposé $r+1$ *fois faiblement dérivable*. La conclusion est la suivante : Δ possède un voisinage compact W (contenu dans le voisinage U défini par la proposition A_r) tel que le module engendré sur W par le module $\mathfrak{T}$ (de la proposition A_r) soit *pur*.

Proposition B'_r. — Mêmes hypothèses que pour la proposition B_r. La conclusion est que Δ possède un voisinage compact W' tel que le module engendré par $\mathfrak{T}$ sur W' soit *parfait*.

Une fois ces propositions démontrées, la proposition B'_n entraînera évidemment le théorème III. Tout revient donc à prouver A_r, B_r et B'_r pour $0 \leq r \leq n$. Pour cela, montrons d'abord que *les propositions* A_r *et* B_r *entraînent la proposition* B'_r. En effet, dans les hypothèses de B'_r, la proposition A_r est applicable au polycylindre Δ (qui, par hypothèse, est compact, simplement connexe, et a ses $n-r$ dernières composantes *ponctuelles*); on trouve donc, sur un voisinage U de Δ, un module $\mathfrak{T}$ de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de U. On peut supposer que U est un polycylindre ouvert, et considérer, en chaque point de U, le module (ponctuel) *dérivé* du module $\mathfrak{T}$. Ces modules dérivés forment, sur U, un système cohérent de modules ponctuels qui remplit les conditions de la proposition A_r. Donc il existe un voisinage compact U_1 de Δ sur lequel le module $\mathfrak{T}$ *est faiblement dérivable*; W ayant la signification de la proposition B_r (appliquée au système cohérent des $\mathfrak{M}_x$), on voit que, sur l'intersection $W \cap U_1$, le module $\mathfrak{T}$ est *pur et faiblement dérivable*; d'après le lemme IV (§ VII, n° 22), il est *parfait*. Et ceci établit précisément la proposition B'_r.

30. Il suffira donc, pour chaque valeur de r, d'établir successivement les propositions A_r et B_r. Or, les propositions A_0 et B_0 sont triviales. Nous allons prouver que, pour tout entier r tel que $1 \leq r \leq n$, les propositions A_{r-1} et B'_{r-1} entraînent A_r; et que les propositions B_{r-1} et A_r entraînent B_r. Ceci suffira à établir le théorème III.

([22]) Pour $r=0$, il faut laisser tomber la condition « r fois dérivable ». Pour $r \geq 2$, la condition « r fois faiblement dérivable », qui entraîne que le module est *dérivable*, entraîne que le module est pur (*cf.* lemme V, § VII, n° 23).

1° *Les propositions* A_{r-1} *et* B'_{r-1} *entraînent la proposition* A_r.

Considérons un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ qui satisfasse aux hypothèses de la proposition A_r. Soit donné un polycylindre Δ, compact et simplement connexe, dont les $n-r$ dernières composantes sont ponctuelles. Désignons par δ_r sa $r^{\text{ième}}$ composante, qui est un ensemble compact dans le plan de la variable x_r. A chaque point x_r de δ_r, associons le polycylindre $\Delta(x_r)$ dont la $r^{\text{ième}}$ composante est réduite au point x_r, et dont les autres composantes sont celles de Δ. Nous pouvons appliquer à $\Delta(x_r)$ les propositions A_r et B'_{r-1}; il existe donc un voisinage $U(x_r)$ du polycylindre $\Delta(x_r)$ et, sur $U(x_r)$ (qu'on peut supposer être un polycylindre compact et simplement connexe), un module *parfait* qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de $U(x_r)$. En vertu de la compacité de δ_r, on arrive au résultat suivant : il existe un nombre *fini* de polycylindres U_i, compacts et simplement connexes, qui tous ont mêmes composantes respectivement dans les plans de toutes les variables sauf de la variable x_r, et dont la réunion U est un voisinage de Δ; et, sur chaque U_i, il existe un module *parfait* $\mathfrak{T}_i$ qui, en chaque point x de U_i, engendre le module ponctuel $\mathfrak{M}_x$. Pour établir la proposition A_r, il reste à prouver qu'il existe, sur U, un module $\mathfrak{T}$ de base finie qui engendre, sur chaque U_i, le module $\mathfrak{T}_i$. Or, désignons par U'_i la réunion des U_j relatifs aux indices $j \leq i$; on a pu choisir les U_i de manière que les U'_i soient *simplement connexes* ([23]). Alors, pour $i \geq 1$, les intersections $U'_{i-1} \cap U_i$ sont simplement connexes. On va démontrer, par récurrence sur i, l'existence, sur U'_i, d'un module de base finie $\mathfrak{T}'_i$ qui, sur chacun des U_j tels que $j \leq i$, engendre $\mathfrak{T}_j$. Pour $i = 1$, il suffit de prendre $\mathfrak{T}'_1 = \mathfrak{T}_1$. Supposons l'existence de $\mathfrak{T}'_{i-1}$ démontrée; alors les modules de base finie $\mathfrak{T}'_{i-1}$ et $\mathfrak{T}_i$ engendrent, en chaque point de $U'_{i-1} \cap U_i$, le même module ponctuel, donc ($\mathfrak{T}_i$ étant *parfait*) ils engendrent le même module sur $U'_{i-1} \cap U_i$. Appliquons le lemme II (§ III, n° 9) : il existe sur la réunion $U'_{i-1} \cup U_i = U'_i$ un module de base finie $\mathfrak{T}'_i$, qui engendre $\mathfrak{T}'_{i-1}$ sur U'_{i-1} et $\mathfrak{T}_i$ sur U_i. C. Q. F. D.

2° *Les propositions* B_{r-1} *et* A_r *entraînent la proposition* B_r.

Considérons un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ qui satisfasse aux hypothèses de la proposition B_r. Soit donné un polycylindre Δ, compact et

([23]) Il suffit de prouver la proposition suivante : étant donné, dans un plan, un ensemble ouvert d et un ensemble δ, compact et *simplement connexe*, contenu dans d, et étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une suite finie d'ensembles u_i, compacts et simplement connexes, contenus dans d, de diamètre $< \varepsilon$, telle que d'une part leur réunion constitue un voisinage de δ, et que, d'autre part, pour tout i la réunion u'_i des u_j relatifs aux indices $j \leq i$ soit *simplement connexe*. Voici, brièvement, comment on peut prouver l'existence d'une telle suite : on enferme δ dans un domaine polygonal ouvert δ', simplement connexe et contenu dans c [*cf.* le lemme I du Mémoire cité dans la note ([10])]; puis, par une homéomorphie effectuée sur l'adhérence δ', on se ramène au cas où δ' est un *carré*, que l'on décompose alors en carrés arbitrairement petits à l'aide d'un quadrillage; chacun des petits carrés étant affecté de deux indices (celui de la ligne et celui de la colonne auxquelles il appartient), on range les petits carrés (fermés) suivant l'ordre lexicographique.

simplement connexe, dont les $n-r$ dernières composantes sont ponctuelles. Appliquons la proposition A_r : il existe un polycylindre ouvert U contenant Δ, et, sur U, un module $\mathfrak{T}$ de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x de U. Ayant choisi une base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{T}$, considérons, en chaque point de U, le module dérivé de cette base; on obtient, sur U, un système cohérent de modules ponctuels qui satisfait aux hypothèses de la proposition A_r; en appliquant cette proposition à ce nouveau système, et au polycylindre Δ, on trouve l'existence d'un voisinage U′ de $\Delta'(U' \subset U)$ sur lequel existe un module $\mathfrak{T}'$ de base finie qui, en tout point de U′, engendre le module (ponctuel) dérivé de la base $\mathcal{B}$. On peut supposer que U′ est un polycylindre ouvert.

La proposition B_{r-1} est applicable à la fois au module $\mathfrak{T}$ et au module $\mathfrak{T}'$ sur le polycylindre U′. Donc, en désignant par δ_r la $r^{\text{ième}}$ composante de Δ, et par $\Delta(x_r)$ (pour chaque point x_r de δ_r) le polycylindre dont la $r^{\text{ième}}$ composante se réduit au point x_r et dont les autres composantes sont les mêmes que celles de Δ, on trouve que $\Delta(x_r)$ possède un voisinage $W(x_r)$ (qu'on peut supposer être un polycylindre compact) tel que $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ engendrent, sur $W(x_r)$, des modules *purs*. De là, grâce à la compacité de δ_r, on conclut à l'existence d'un nombre fini de polycylindres compacts W_i, qui tous ont mêmes composantes respectivement dans les plans de toutes les variables sauf de la variable x_r, et dont la réunion W est un voisinage de Δ; et, sur chaque W_i, les modules engendrés par $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont *purs*.

Reste à montrer que le module engendré par $\mathfrak{T}$ sur W est *pur*. Soit f une fonction holomorphe sur un polycylindre compact Δ' contenu dans W, et telle que f appartienne, en chaque point x de Δ', au module $\mathfrak{T}_x$ engendré par $\mathfrak{T}$ en ce point; il faut montrer que, dans ces conditions, f appartient au module engendré par $\mathfrak{T}$ sur Δ'. Posons $W_i \cap \Delta' = W'_i$; désignons par W''_i la réunion des W'_j pour $j \leq i$. Nous allons montrer, par récurrence sur i, que, sur W''_i, la fonction f appartient au module engendré par $\mathfrak{T}$. Or, ceci est vrai pour $i = 1$, parce que $W''_1 = W'_1$ est contenu dans W_1, et que le module engendré par $\mathfrak{T}$ sur W_1 est *pur*. Supposons la proposition démontrée pour W''_{i-1}, et démontrons-la pour W''_i : sur W''_{i-1}, on a ($f_1, \ldots, f_p$ désignant les fonctions de la base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{T}$)

$$f = \sum_{k=1}^{p} a_k f_k \qquad (a_k \text{ holomorphes sur } W''_{i-1}),$$

et, sur W'_i,

$$f = \sum_{k=1}^{p} b_k f_k \qquad (b_k \text{ holomorphes sur } W'_i).$$

Sur l'intersection $W''_{i-1} \cap W'_i$, qui est contenue dans W_i, on a donc

$$\sum_{k=1}^{p} (a_k - b_k) f_k = 0.$$

Or, puisque $\mathfrak{T}'$ engendre sur W_i un module pur, $\mathfrak{T}'$ engendre, sur le polycylindre $W'_{i-1} \cap W'_i$, le module dérivé (sur ce polycylindre) de la base $\mathcal{B}$; on en conclut (en raisonnant comme pour le lemme V, § VII, n° 23) que f est combinaison linéaire des f_k à coefficients holomorphes sur la réunion $W''_{i-1} \cup W'_i = W''$.

C. Q. F. D.

La démonstration du théorème III est ainsi achevée.

31. Nous allons maintenant étendre le théorème III au cas d'un polycylindre *ouvert*.

Théorème III *bis*. — *Soit* D *un polycylindre ouvert et simplement connexe de l'espace à n dimensions. Soit, sur* D, *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$, *jouissant de la propriété suivante : tout point de* D *possède un voisinage compact* V (*contenu dans* D) *sur lequel existe un module* $n+1$ *fois faiblement dérivable qui engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* V. *Alors le module* $\mathfrak{T}$, *associé au système cohérent, engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* D, *et ce module* $\mathfrak{T}$ *est parfait.*

Remarque. — Contrairement à ce qui a lieu pour un polycylindre *compact* et simplement connexe (cas du théorème III), il n'est pas certain ici que $\mathfrak{T}$ ait une base finie; il n'est pas certain non plus que $\mathfrak{T}$ soit le seul module, sur D, qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de D. Du moins, je n'ai pu parvenir à le démontrer.

Pour déduire le théorème III *bis* du théorème III, nous établirons un lemme :

Lemme VIII. — *Soit* D *un polycylindre ouvert, réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts* Δ_i. *Si un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$, *sur* D, *peut, sur chaque* Δ_i, *être engendré par un module pur* (module pur qui est nécessairement le module associé, sur Δ_i, au système cohérent), *alors le module* $\mathfrak{T}$ *associé, sur* D, *au système cohérent, engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* D.

Démontrons d'abord que si une fonction f, holomorphe en un point a de D, appartient au module ponctuel $\mathfrak{M}_a$, il existe un voisinage de a sur lequel f peut être uniformément approchée par les fonctions du module $\mathfrak{T}$. Soit en effet i un entier tel que $a \in \Delta_i$. Soit $\mathfrak{T}_i$ un module pur, sur Δ_i, qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de Δ_i. Alors f est combinaison linéaire de fonctions de $\mathfrak{T}_i$ à coefficients holomorphes sur un voisinage compact V de a. Sur V, ces coefficients peuvent être uniformément approchés par des fonctions holomorphes dans D; donc f, sur V, peut être uniformément approchée par des fonctions de $\mathfrak{T}_i$. Mais toute fonction de $\mathfrak{T}_i$ peut être, sur Δ_i, arbitrairement approchée par une fonction de $\mathfrak{T}_{i+1}$, comme le montre un raisonnement analogue; et l'on peut poursuivre indéfiniment, de sorte que l'on peut trouver une suite de fonctions

$$f, \quad f_i, \quad f_{i+1}, \quad f_{i+2}, \quad \ldots \qquad (f_{i+k} \in \mathfrak{T}_{i+k})$$

telles que

$$|f_i - f| \leqq \varepsilon_i \quad \text{sur V},$$
$$|f_{i+1} - f_i| \leqq \varepsilon_{i+1} \quad \text{sur } \Delta_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{i+k+1} - f_{i+k}| \leqq \varepsilon_{i+k+1} \quad \text{sur } \Delta_{i+k}.$$

Si la série $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \ldots$ est convergente et de somme ε, la suite des f_{i+k} converge, en tout point de D, vers une fonction g, *holomorphe sur* D (puisque la convergence est uniforme au voisinage de chaque point de D), et l'on a, sur V,

$$|f - g| \leqq \varepsilon.$$

D'autre part, en chaque point x de D, les f_{i+k} appartiennent à $\mathfrak{M}_x$, donc g appartient à $\mathfrak{M}_x$ (17) en tout point x; autrement dit, g appartient au module $\mathfrak{F}$.

Prouvons maintenant le lemme VIII. Soit $\mathfrak{F}_a$ le module engendré par $\mathfrak{F}$ au point a. Nous voulons montrer que $\mathfrak{F}_a = \mathfrak{M}_a$. On a évidemment $\mathfrak{F}_a \subset \mathfrak{M}_a$. Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_a$; montrons que f appartient à $\mathfrak{F}_a$: il existe, on vient de le voir, un voisinage compact V de a sur lequel f est limite uniforme de fonctions de $\mathfrak{F}_a$; donc f appartient au module ponctuel $\mathfrak{F}_a$. C. Q. F. D.

Ce lemme étant établi, le théorème III *bis* se démontre immédiatement en considérant le polycylindre D, ouvert et simplement connexe, comme réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts et simplement connexes, auxquels on applique le théorème III.

32. Tirons maintenant quelques conséquences faciles des théorèmes III et III *bis*. Tout d'abord :

Corollaire du théorème III. — *Soit* Δ *un polycylindre compact et simplement connexe de l'espace à n dimensions. Si un module* $\mathfrak{M}$, *sur* Δ, *jouit de la propriété que tout point de* Δ *possède un voisinage compact* V *sur lequel existe un module* $n+1$ *fois faiblement dérivable qui, en chaque point* x *de* $\Delta \cap$ V, *engendre le même module que* $\mathfrak{M}$, *alors le module* $\mathfrak{M}$ *est parfait; en particulier,* $\mathfrak{M}$ *possède une base finie.*

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème III au système cohérent engendré par $\mathfrak{M}$.

Théorème IV. — *Soit* D *un polycylindre simplement connexe (compact ou ouvert) de l'espace à n dimensions. Soit, sur* D, *un système cohérent d'idéaux ponctuels* $\mathfrak{J}_x$ *jouissant de la propriété suivante : en chaque point* x *de* D, *l'idéal* $\mathfrak{J}_x$ *possède une base de p fonctions et sa variété est à* $n - p$ *dimensions (p est un entier indépendant du point* x*). Alors l'idéal* $\mathfrak{J}$, *associé au système cohérent, engendre* $\mathfrak{J}_x$ *en tout point* x *de* D, *et cet idéal est parfait. En outre : sur tout polycylindre compact* Δ *contenu dans* D, *l'idéal* $\mathfrak{J}_\Delta$ *est dérivable, et son module dérivé est parfait; l'idéal* $\mathfrak{J}_\Delta$ *est même indéfiniment dérivable.*

Pour prouver la première partie de ce théorème, on observe que, d'après le lemme VI (§ VIII, n° 27), les conditions d'application des théorèmes III et III *bis* sont remplies. Pour prouver la seconde partie, on considère sur Δ, le système cohérent des modules dérivés (ponctuels) d'une base de l'idéal $\mathfrak{J}_\Delta$, système qui, lui aussi (d'après le lemme VI), remplit les conditions du théorème III. C. Q. F. D.

Pour terminer, on peut combiner les conclusions du théorème IV et celles du théorème I : celui-ci est en effet applicable à l'idéal $\mathfrak{J}$ du théorème IV. En particulier :

Soit un polycylindre D *et un système cohérent d'idéaux ponctuels* $\mathfrak{J}_x$ *satisfaisant aux conditions du théorème* IV ; *soit* φ *une fonction holomorphe sur la variété du système cohérent* (c'est-à-dire holomorphe au voisinage de chaque point x de D en lequel l'idéal $\mathfrak{J}_x$ n'est pas l'idéal-unité). *Alors il existe une fonction* f *holomorphe sur* D, *et égale à* φ *en tout point de la variété du système cohérent.*

V. — Applications du théorème fondamental.

33. Soit, dans l'espace de r variables complexes $x_1, \ldots, x_r$, un ensemble *ouvert* A. On sait que, si A est un « domaine d'holomorphie » ([24]), A est « convexe par rapport à la famille des fonctions holomorphes dans A » [*voir* le Mémoire cité en ([24])], d'où résulte le fait suivant : A est réunion d'une suite croissante d'ensembles *compacts* B_i, dont chacun peut être défini par un nombre *fini* d'inégalités

$$f_k(x) \leqq 1,$$

les f_k étant holomorphes dans A. Nous nous proposons d'étudier les ensembles de ce type, que nous appellerons *domaines polyédraux*. Ils ont été considérés en premier lieu par A. Weil (*Math. Ann.*, 111, 1935, p. 178-182 ; *voir* aussi *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1034). Ainsi un domaine polyédral B est défini d'abord par la donnée d'un ensemble ouvert A, ensuite par celle d'un nombre fini s de fonctions *holomorphes dans* A, telles que l'ensemble B des points de A satisfaisant au système d'inégalités

$$|f_k(x)| \leqq 1$$

soit *compact* ; il existe alors un nombre ρ assez grand pour que B soit contenu dans le polycylindre

$$|x_j| \leqq \rho \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

([24]) *Voir* H. Cartan et P. Thullen, *Math. Annalen*, 106, 1932, pp. 617-647. En gros, un domaine d'holomorphie est un ensemble ouvert A dans lequel existe une fonction holomorphe qui n'est susceptible d'aucun prolongement analytique au delà de A.

Suivant une idée de A. Weil et K. Oka, le domaine polyédral B est isomorphe à une variété (à r dimensions) d'un polycylindre compact de l'espace à $r+s$ dimensions. En effet, dans l'espace des $n=r+s$ variables x_j et y_k ($1\leqq j\leqq r$; $1\leqq k\leqq s$), considérons le lieu V du point de coordonnées

$$x_1, \ldots, x_r, y_1=f_1(x), \ldots, y_s=f_s(x)$$

lorsque le point $x=(x_1, \ldots, x_r)$ décrit B; c'est une variété analytique complexe à r dimensions dans le polycylindre compact Δ

$$|x_j|\leqq\rho, \qquad |y_k|\leqq 1.$$

Au voisinage d'un point de V, les s fonctions

$$y_k-f_k(x)$$

engendrent un idéal (ponctuel); ces idéaux forment évidemment, *au voisinage de* V, un système cohérent; complétons-le en un système cohérent *sur le polycylindre* D, en attachant l'idéal-unité à chaque point de D non situé sur V. Les conditions du théorème IV (§ IX, n° 32) sont évidemment remplies. On obtient alors le résultat fondamental suivant :

La variété V *est l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions* $\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ *holomorphes sur le polycylindre* Δ. *En outre, toute fonction holomorphe sur* Δ *et qui s'annule sur* V, *est combinaison linéaire des* φ_α *à coefficients holomorphes sur* Δ.

Ce n'est pas tout. Soit $g(x)$ une fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_r$ sur le domaine polyédral B; g définit, au voisinage de la variété V du polycylindre Δ, une fonction holomorphe. Donc, d'après les résultats de la fin du paragraphe IX (n° 32), *il existe une fonction* $\gamma(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, *holomorphe sur* Δ, *et égale à* g *sur* V; *autrement dit, une fonction* $\gamma(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ *telle que l'on ait identiquement*

$$\gamma[x_1, \ldots, x_r, f_1(x), \ldots, f_s(x)]=g(x_1, \ldots, x_r)$$

sur le domaine polyédral B.

Sur le polycylindre Δ, la fonction γ est développable en série entière : donc, *sur* B, *toute fonction holomorphe* g *est limite uniforme de polynomes en* $x_1, \ldots, x_r$, $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ ([25]). Il en résulte que *toute fonction holomorphe sur* B *est limite uniforme de fonctions holomorphes sur* A.

([25]) Ce résultat avait été obtenu par A. Weil (*Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1034) dans le cas où les f_k sont des *polynomes* ou des *fractions rationnelles;* il avait été ensuite étendu au cas général par K. Oka [deuxième des Mémoires cités dans la note ([4])], mais par une tout autre voie que la nôtre.

34. Nous sommes aussi en mesure de résoudre un problème posé par A. Weil. Ce dernier a donné (*loc. cit.*) une formule intégrale qui exprime, en tout point intérieur à un domaine polyédral B, la valeur d'une fonction g holomorphe sur B, à l'aide d'intégrales étendues aux « arêtes » à r dimensions (réelles) du domaine polyédral; ces intégrales font intervenir seulement les valeurs de g sur ces arêtes. Mais, pour ce faire, Weil devait admettre l'existence de certaines identités qu'il ne pouvait établir que dans certains cas particuliers. Ainsi qu'il me l'a communiqué dans une lettre de décembre 1940, le problème peut, en toute généralité, se formuler ainsi : désignons par S_k la « face » du domaine polyédral B définie par

$$|f_k(x)| = 1, \qquad |f_j(x)| \leqq 1 \quad \text{pour } j \neq k;$$

soient $h_\beta(x)$ des fonctions (en nombre *fini* quelconque) holomorphes sur B, et *sans zéro commun sur la frontière de* B; il s'agit de montrer que, pour chaque face S_k, il existe des fonctions $\lambda_\beta(x)$ *holomorphes sur cette face* et telles que l'on ait identiquement

$$\sum_\beta \lambda_\beta h_\beta = 1.$$

Or voici comment nous pouvons démontrer l'existence de telles fonctions λ_β. Faisons la démonstration pour la face S_1. Il existe, on l'a vu, des fonctions $H_\beta(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ holomorphes sur le polycylindre Δ, et qui, sur la variété V définie par $y_k = f_k(x)$, se réduisent respectivement aux fonctions $h_\beta(x)$. La variété V étant, comme on l'a vu plus haut, définie par des équations

$$\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0,$$

on voit que, sur le polycylindre compact Δ',

$$x_j \leqq \rho, \qquad |y_1| = 1, \qquad |y_k| \leqq 1 \qquad \text{pour } k \geqq 2,$$

les fonctions φ_α et H_β n'ont aucun zéro commun; d'après le corollaire du théorème II (§ VI, n° 20), il existe des fonctions μ_α et Λ_β holomorphes sur Δ', et telles que l'on ait

$$\sum_\alpha \mu_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\beta \Lambda_\beta H_\beta = 1$$

identiquement sur Δ'. Si dans cette identité on remplace les y_k par $f_k(x)$, les φ_α donnent *zéro*, les H_β se réduisent aux h_β, et les Λ_β se réduisent à des fonctions λ_β holomorphes sur S_1; d'où l'identité, sur S_1,

$$\sum_\beta \lambda_\beta h_\beta = 1.$$

C. Q. F. D.

XI. — Principaux problèmes restant à résoudre.

35. Nous signalerons seulement deux des problèmes essentiels à résoudre.

PREMIER PROBLÈME. — *Les modules dérivés (ponctuels) d'un système fini quelconque de fonctions holomorphes forment-ils un système cohérent?* On peut voir facilement qu'il suffirait de résoudre ce problème dans le cas où les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont à valeurs complexes (c'est-à-dire de dimension $q = 1$). Et l'on voit aussi qu'il suffirait de résoudre le problème suivant : *$\mathfrak{I}$ désignant un idéal de base finie, et f une fonction holomorphe (à valeurs complexes), considérons, en chaque point x, l'idéal $\mathfrak{J}_x$ des fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{I}_x$ et sont divisibles par f; ces idéaux forment-ils un système cohérent?* Autrement dit, si a désigne un point particulier, une base finie de $\mathfrak{J}_a$ engendre-t-elle $\mathfrak{J}_x$ en tous les points x suffisamment voisins de a?

Si ce problème pouvait être résolu, des déductions que nous n'exposerons pas ici montrent que le théorème III du paragraphe XI s'étendrait à tous les systèmes cohérents de modules ponctuels, sans exception. D'une façon précise, les trois énoncés suivants seraient vrais :

« Tout système cohérent de modules ponctuels, sur un polycylindre compact et simplement connexe, est engendré par le module associé à ce système » (Solution du problème I du § IV).

« Deux modules (sur un polycylindre Δ compact et simplement connexe) qui engendrent en chaque point de Δ des modules identiques, sont identiques » (Solution du problème II du § IV).

« Tout module, sur un polycylindre compact et simplement connexe, a une base finie. »

DEUXIÈME PROBLÈME. — *Soit* V *une variété analytique au voisinage d'un point a, $\mathfrak{I}_a$ l'idéal de cette variété au point a* (c'est-à-dire l'idéal des fonctions, holomorphes au point a, qui s'annulent identiquement sur V dans un voisinage de a). *Une base finie de $\mathfrak{I}_a$ engendre-t-elle, en tout point x de* V *suffisamment voisin de a, l'idéal $\mathfrak{I}_x$ de la variété* V *au point x?*

Si ce problème pouvait être résolu par l'affirmative, ainsi que le « premier problème », l'énoncé suivant serait exact : « Toute variété analytique (au sens du § I) sur un polycylindre Δ compact et simplement connexe, peut être obtenue comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions *holomorphes sur* Δ ». Ce résultat n'a été démontré ici que dans le cas particulier des variétés analytiques considérées au paragraphe X.

XII. — Extension aux domaines d'holomorphie, des résultats démontrés pour les polycylindres.

36. Tous les résultats des paragraphes V à IX inclus peuvent s'étendre à des domaines plus généraux que les polycylindres : tout ce qui a été démontré pour les polycylindres *compacts* (qu'on ait dû ou non les supposer simplement connexes) vaut pour tous les *domaines polyédraux* (définis au paragraphe X, n° 33); tout ce qui a été démontré pour les polycylindres *ouverts* (qu'on ait dû ou non les supposer simplement connexes) vaut pour tous les *domaines d'holomorphie*, au moins lorsqu'ils sont univalents (c'est-à-dire lorsqu'un point de l'espace n'est jamais recouvert par deux points distincts du domaine). La possibilité de cette extension repose sur les trois lemmes suivants :

LEMME A. — *Soit* B *un domaine polyédral de l'espace de n variables* $x_1, \ldots, x_n$; *soient* δ' *et* δ'' *deux polycylindres compacts ayant respectivement mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une, et soient* B' *et* B'' *les intersections respectives de* B *avec* δ' *et* δ''. *Alors toute fonction holomorphe sur l'intersection* $B' \cap B''$ *peut se mettre sous la forme de la différence entre une fonction holomorphe sur* B' *et une fonction holomorphe sur* B''.

Démonstration. — D'après le paragraphe X, B peut être assimilé à une variété V à n dimensions d'un polycylindre Δ

$$|x_i| \leq \rho, \qquad |y_\alpha| \leq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, p).$$

Si, aux équations de ce polycylindre, on rajoute celles de δ'

$$x_i \in \delta_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un polycylindre compact Δ' contenu dans Δ; de même, δ'' définit un polycylindre compact Δ'' contenu dans Δ; et Δ' et Δ'' ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une. Si f est une fonction holomorphe sur le domaine polyédral $B' \cap B''$, il existe une fonction

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$$

holomorphe sur $\Delta' \cap \Delta''$, dont la trace sur $V \cap \Delta' \cap \Delta''$ n'est autre que f (ceci a été démontré au paragraphe X). D'après un théorème classique (qui résulte immédiatement de la formule de Cauchy), φ est la différence entre une fonction φ' holomorphe sur Δ' et une fonction φ'' holomorphe sur Δ''. Les traces f' et f'' de ces fonctions sur $V \cap \Delta'$ et $V \cap \Delta''$ respectivement sont holomorphes sur B' et B'' respectivement, et leur différence, sur $B' \cap B''$, est f; ce qui démontre le lemme.

LEMME B. — *Les notations du lemme* A *étant conservées, supposons en outre que l'intersection* $\delta' \cap \delta''$ *soit simplement connexe. Si deux modules de bases finies*

(*à un même nombre q de dimensions*) m' *sur* B', *et* m'' *sur* B'', *engendrent le même module sur* $B' \cap B''$, *alors il existe sur la réunion* $B' \cup B''$ *un module m de base finie qui engendre* m' *sur* B' *et* m'' *sur* B''.

Ce lemme, qui généralise le lemme II (§ IV), sauf qu'ici on ne peut plus préciser le nombre de fonctions que l'on peut donner à la base de m, s'y ramène de la façon suivante. Considérons, sur Δ' (mêmes notations que pour la démonstration du lemme A), le module $\mathfrak{M}'$ des fonctions dont la trace sur $V \cap \Delta'$ appartient au module m'; et, sur Δ'' le module $\mathfrak{M}''$ des fonctions dont la trace sur $V \cap \Delta''$ appartient à m''. Les modules $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ engendrent, sur $\Delta' \cap \Delta''$ (qui est simplement connexe), le même module, savoir celui des fonctions dont la trace sur $V \cap \Delta' \cap \Delta''$ appartient au module engendré par m' (ou par m'') sur $B' \cap B''$. De plus $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ ont des bases finies (parce que l'idéal des fonctions qui s'annulent sur V a une base finie, d'après le paragraphe X). Le lemme II prouve alors l'existence, sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, d'un module $\mathfrak{M}$ de base finie, qui engendre $\mathfrak{M}'$ sur Δ' et $\mathfrak{M}''$ sur Δ''. Les fonctions de cette base ont pour traces, sur V, des fonctions holomorphes sur $B' \cup B''$, et ces fonctions engendrent m' sur B', et m'' sur B''. C. Q. F. D.

Lemme C. — *Soit* D *un ensemble ouvert de l'espace* $(x_1, \ldots, x_n)$ *qui soit « domaine d'holomorphie »; on sait que* D *est réunion d'une suite croissante d'ensembles compacts* B_i, *dont chacun est un « domaine polyédral » défini par des inégalités en nombre fini*

$$|f_k(x)| \leqq 1 \qquad (f_k \text{ holomorphes dans D}).$$

Dans ces conditions, toute fonction holomorphe sur un B_i *peut être uniformément approchée par des fonctions holomorphes dans* D.

En effet, on a démontré au paragraphe 10 que toute fonction holomorphe sur B_i est limite uniforme de polynomes en $x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_p(x)$, les f_k désignant les fonctions qui servent précisément à définir B_i.

37. Une fois ces trois lemmes établis, tout le texte des paragraphes V à IX inclus peut se transposer, à condition de remplacer partout « polycylindre compact » par « domaine polyédral », et « polycylindre ouvert » par « domaine d'holomorphie ». Par exemple, les définitions de module *parfait* et de module *pur* sont à modifier en conséquence. On obtiendra ainsi notamment :

L'extension du théorème I (§ V) aux modules *purs* sur un domaine polyédral, ou sur un domaine d'holomorphie.

L'extension du théorème II (§ VI) aux idéaux (sur un domaine polyédral ou sur un domaine d'holomorphie) qui possèdent une base de p fonctions et dont la variété est à $n - p$ dimensions; en particulier, *si des fonctions* f_i *en nombre fini, holomorphes dans un domaine d'holomorphie* D, *n'ont aucun zéro commun*

dans D, *il existe une identité*

$$\sum_i a_i f_i = 1,$$

à coefficients a_i *holomorphes dans* D.

L'extension du théorème III (théorème fondamental, § IX) : si B est un domaine polyédral de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$, et si l'on a, sur B, un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ qui, au voisinage de tout point, puisse être engendré par un module $n+1$ fois faiblement dérivable, il existe, sur B, *un module et un seul* qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x, et ce module a une *base finie*. Extension analogue du théorème III *bis*.

L'extension du théorème IV : si D est un domaine d'holomorphie, et si l'on a, sur D, un système cohérent d'idéaux ponctuels $\mathfrak{I}_x$ dont chacun possède une base de p fonctions et a une variété à $n-p$ dimensions, alors l'idéal associé au système cohérent engendre $\mathfrak{I}_x$ en chaque point x de D, et cet idéal est parfait, etc. En outre, toute fonction f holomorphe sur la variété V du système cohérent est égale, sur V, à la trace d'une fonction holomorphe sur D.

38. Pour terminer, faisons une remarque au sujet du problème de Cousin, qui consiste (*voir* l'Introduction, § I), étant donné dans D un système cohérent de *fonctions* f_x (c'est-à-dire une « donnée de Cousin »), à trouver une fonction unique f, holomorphe sur D, telle que, en chaque point x de D, le quotient $\frac{f}{f_x}$ soit holomorphe et $\neq 0$. Comme on l'a rappelé, ce problème n'admet pas de solution lorsque D est un polycylindre dont deux composantes au moins ne sont pas simplement connexes. Mais nos résultats généraux s'appliquent néanmoins à ce cas, et au cas plus général où D est un domaine d'holomorphie quelconque : il existe donc un *idéal* sur D (de base *finie* si D est un domaine polyédral) qui, en chaque point x de D, engendre l'idéal de base f_x; ce qui arrive, c'est simplement que cet idéal n'a pas nécessairement une base formée d'une fonction *unique*. Par conséquent, une variété à $n-1$ dimensions, dans un domaine d'holomorphie D, même lorsqu'elle ne peut pas être définie comme l'ensemble des zéros d'*une* fonction holomorphe sur D, peut toujours être définie comme l'ensemble des zéros communs à une famille de fonctions holomorphes sur D (cette famille étant *finie* lorsque D est un domaine polyédral).

APPENDICE I.

Idéaux et modules ponctuels.

1. Il est classique que tout idéal ponctuel a une base finie, d'où l'on déduit facilement que tout module ponctuel a une base finie. Je vais démontrer à nouveau ce résultat en le complétant; au cours de ce travail, j'ai eu besoin, en

effet, de résultats plus précis que je n'ai pas trouvés dans la littérature existante; je crois donc utile d'en donner ici la démonstration.

THÉORÈME α. — *Soit, en un point a de l'espace à n dimensions complexes, un nombre fini de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_j$ (à un nombre quelconque de dimensions, non nécessairement le même pour les différents $\mathfrak{M}_j$). *Il existe, pour chaque* $\mathfrak{M}_j$, *une base finie* $\mathfrak{B}_j$; *en outre, on peut choisir les axes de coordonnées* ([26]) *de telle manière qu'il existe une famille* $\mathfrak{F}$ *de polycylindres compacts constituant un système fondamental de voisinages* ([27]) *de a, et jouissant de la propriété suivante :* $\mathfrak{M}_j$ *désignant l'un quelconque des modules donnés, et* W *l'un quelconque des voisinages de la famille* $\mathfrak{F}$, *il existe une constante positive k telle que si une fonction f est holomorphe sur* W, *de valeur absolue* ([28]) $\leqq 1$ *sur* W, *et appartient au module* $\mathfrak{M}_j$ *au point a, une telle f puisse se mettre* (*sur* W) *sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de* $\mathfrak{B}_j$, *les coefficients de cette combinaison étant holomorphes sur* W *et de valeurs absolues* $\leqq k$ *sur* W.

D'une façon précise, nous désignerons sous le nom de « théorème α_n » le théorème précédent relatif à l'espace à n dimensions. Un cas particulier du théorème α_n est celui que l'on obtient en supposant que, dans l'énoncé, les modules $\mathfrak{M}_j$ sont tous à une dimension, c'est-à-dire sont des *idéaux* $\mathfrak{I}_j$; nous désignerons sous le nom de théorème α'_n l'énoncé (plus faible) ainsi obtenu. Or il nous suffit de démontrer le théorème α'_n, car ce dernier entraine à son tour le théorème α_n : en effet, si $\mathfrak{M}$ est un module à q dimensions, on peut lui associer les q idéaux suivants :

l'idéal $\mathfrak{I}_1$ des premières composantes des fonctions de $\mathfrak{M}$;

l'idéal $\mathfrak{I}_2$ des deuxièmes composantes de celles des fonctions de $\mathfrak{M}$ dont la première composante est nulle;

. . . . . .

l'idéal $\mathfrak{I}_q$ des dernières composantes de celles des fonctions de $\mathfrak{M}$ dont les $q-1$ premières composantes sont nulles.

Si l'on opère ainsi pour chacun des modules du théorème α_n, on est amené à considérer une famille finie d'idéaux; et l'on vérifie aussitôt que le théorème α'_n, appliqué à ces idéaux, entraine le théorème α_n pour les modules donnés.

([26]) C'est-à-dire effectuer, sur les coordonnées existantes, une substitution linéaire à coefficients constants, de déterminant non nul.

([27]) Une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles constitue un *système fondamental de voisinages* de a, si chaque ensemble de $\mathfrak{F}$ est un voisinage de a, et si tout voisinage de a contient au moins un ensemble de la famille $\mathfrak{F}$.

([28]) Nous appelons *valeur absolue* d'une fonction f (à q dimensions) de composantes $f_1, \ldots, f_q$ la plus grande des valeurs absolues $|f_1|, \ldots, |f_q|$.

2. Cela dit, nous prouverons le théorème α'_n *par récurrence sur l'entier* n. Il est trivial pour $n = 0$ (idéaux dans le corps des constantes complexes). Reste à montrer, pour chaque $n \geq 1$, que, *si le théorème* α'_{n-1} *est vrai* (*et par suite aussi le théorème* α_{n-1}), *le théorème* α'_n *est vrai*.

Cherchons donc à démontrer le théorème α'_n. On peut se borner au cas où les idéaux $\mathfrak{I}_j$ considérés sont tous différents de l'idéal-zéro. Le point a étant pris pour origine, choisissons le premier axe de coordonnées de manière que chacun des idéaux $\mathfrak{I}_j$ possède une fonction g_j qui ne s'annule pas identiquement pour $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ (x_1 voisin de zéro). Dans ces conditions, il est classique ([20]) que chaque g_j est « équivalente » à un « polynome distingué »; rappelons qu'on appelle *polynome distingué* (au point a pris pour origine) un polynome en x_1 (éventuellement une constante) dont le coefficient du terme de degré le plus élevé est égal à 1, tous les autres coefficients étant holomorphes en $x_2, \ldots, x_n$ au voisinage de l'origine, et nuls à l'origine; et rappelons aussi que deux fonctions holomorphes au point a sont dites *équivalentes* si elles engendrent le même idéal en ce point. Ainsi, moyennant un choix convenable du premier axe de coordonnées, on peut supposer que chacun des idéaux $\mathfrak{I}_j$ contient un polynome distingué en x_1, polynome que nous désignerons à nouveau par g_j; soit ρ_j son degré.

3. Admettons pour un instant le lemme suivant : *Soit* g *un polynome distingué en* x_1, *de degré* ρ, *et soient* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *des nombres* > 0 *tels que* : 1° *les coefficients de* g *soient holomorphes sur le polycylindre* δ

$$(\delta) \qquad |x_2| \leq r_2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leq r_n;$$

2° *lorsque le point* $(x_2, \ldots, x_n)$ *appartient à* δ, *les racines* (*en* x_1) *du polynome* g *soient toutes de valeur absolue* $< r_1$. *Alors il existe un nombre positif* h *jouissant de la propriété suivante : si une fonction* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est holomorphe sur le polycylindre* Δ

$$(\Delta) \qquad |x_1| \leq r_1, \quad |x_2| \leq r_2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leq r_n$$

et y satisfait à $|f| \leq 1$, *elle satisfait, sur* Δ, *à une identité*

$$f = \lambda g + Q,$$

λ *étant holomorphe et de valeur absolue* $\leq h$ *sur* Δ, *et* Q *étant un polynome en* x_1, *de degré* $\rho - 1$, *dont tous les coefficients sont holomorphes et de valeur absolue* $\leq h$ *sur* δ.

Ce lemme étant provisoirement admis, démontrons le théorème α'_n. Pour chaque idéal $\mathfrak{I}_j$, considérons l'ensemble $\mathfrak{M}_j$ de ceux des polynomes en x_1, de

([20]) *Voir* par exemple Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II, 1.

degré $\rho - 1$, à coefficients holomorphes en $x_2, \ldots, x_n$ à l'origine, qui appartiennent à $\mathfrak{I}_j$. L'ensemble $\mathfrak{M}_j$ est évidemment un module (à ρ dimensions) sur l'anneau des fonctions holomorphes des $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$. Appliquons aux modules $\mathfrak{M}_j$ le théorème α_{n-1} : on obtient une base finie $\mathcal{C}_j$ pour chaque $\mathfrak{M}_j$, et un choix des coordonnées dans l'espace $(x_2, \ldots, x_n)$ tel qu'il existe une famille $\mathcal{G}$ de polycylindres compacts (de ce dernier espace) pour lesquels l'énoncé du théorème α_{n-1} est valable. Désignons alors par $\mathcal{B}_j$ l'ensemble formé des fonctions de $\mathcal{C}_j$ et de la fonction g_j; $\mathcal{B}_j$ est évidemment une base finie de $\mathfrak{I}_j$. En outre, considérons, dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où les axes de coordonnées sont maintenant choisis, la famille $\mathcal{F}$ des polycylindres compacts de la forme

$$|x_1| \leq r_1, \qquad (x_2, \ldots, x_n) \in \delta,$$

où δ désigne un polycylindre de la famille $\mathcal{G}$, tel que, lorsque $(x_2, \ldots, x_n) \in \delta$, les zéros de chacun des polynomes g_j satisfassent tous à $|x_1| < r_1$. Le lemme ci-dessus prouve immédiatement que l'énoncé du théorème α'_n est valable pour les bases finies $\mathcal{B}_j$ et la famille $\mathcal{F}$.

4. Il reste donc seulement à démontrer le lemme. Nous utiliserons pour cela l'intégrale de Cauchy. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{g(\xi, x_2, \ldots, x_n)} \frac{d\xi}{\xi - x_1},$$

est indépendante de r (r assez voisin de r_1 et $> r_1$); elle représente une fonction $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ holomorphe sur Δ (notations du lemme). D'autre part, définissons

$$Q = f - \lambda g;$$

on a

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{g(\xi, x_2, \ldots, x_n)} \frac{g(\xi, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\xi - x_1} d\xi;$$

or

$$\frac{g(\xi, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\xi - x_1} = \sum_{p=0}^{\rho-1} (x_1)^p u_p(\xi, x_2, \ldots, x_n),$$

les u_p étant des polynomes en ξ, à coefficients holomorphes sur δ. D'où, en intégrant,

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{\rho-1} (x_1)^p v_p(x_2, \ldots, x_n),$$

avec

$$v_p(x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{g(\xi, x_2, \ldots, x_n)} u_p(\xi, x_2, \ldots, x_n) d\xi.$$

Supposons $|f| \leqq 1$ sur Δ; alors $|v_p|$ reste, sur δ, inférieur à un nombre fixe (c'est-à-dire à un nombre qui dépend de g, mais ne dépend pas de f); donc $|\lambda g| = |f - Q|$ reste, sur Δ, inférieur à un nombre fixe. D'autre part, pour

$$|x_1| = r_1, \qquad (x_2, \ldots, x_n) \in \delta,$$

$|g|$ reste supérieur à un nombre positif fixe; donc $|\lambda|$ est majoré par un nombre fixe h; et cette majoration de $|\lambda|$ est encore valable sur Δ tout entier, puisque la valeur absolue d'une fonction de x_1, holomorphe pour $|x_1| \leqq r_1$, atteint sa borne supérieure pour $|x_1| = r_1$. Le lemme est ainsi démontré; et la démonstration du théorème α est achevée.

5. Premier corollaire. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module (à q dimensions) au point a. Si une fonction g (à q dimensions), holomorphe sur un voisinage* V *de a, est, sur* V, *limite uniforme de fonctions (holomorphes sur* V) *qui appartiennent à $\mathfrak{M}$ au point a, la fonction g appartient à $\mathfrak{M}$ au point a.*

En effet, l'hypothèse entraîne que g est limite d'une suite de fonctions g_p holomorphes sur V, telles que l'on ait, sur V,

$$|g_{p+1} - g_p| \leqq 2^{-p},$$

chaque g_p appartenant au module $\mathfrak{M}$. D'après le théorème α, on a des identités

$$g_{p+1} - g_p = \sum_j a_{pj} f_j$$

(les f_j constituant une base finie de $\mathfrak{M}$, indépendante de l'indice p), les coefficients a_{pj} étant holomorphes sur un certain voisinage compact W contenu dans V, et satisfaisant, sur W, aux inégalités $|a_{pj}| \leqq k \cdot 2^{-p}$ (k nombre positif fixe). Il en résulte que, pour chaque j, la série $\sum_p a_{pj}$ converge uniformément sur W; sa somme a_j est holomorphe à l'intérieur de W (et en particulier au point a); et l'on a, au voisinage de a,

$$g - g_1 = \sum_i a_j f_j,$$

ce qui prouve que g appartient au module $\mathfrak{M}$.

Deuxième corollaire. — *Si deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ (au même nombre de dimensions) sur un voisinage* V *de a, engendrent, au point a, des modules $\mathfrak{M}_a$ et $\mathfrak{N}_a$ identiques, ils engendrent, sur tout ensemble* E *suffisamment voisin de a (et, en particulier, sur tout ensemble ponctuel suffisamment voisin de a), des modules $\mathfrak{M}_E$ et $\mathfrak{N}_E$ identiques.*

En effet, appliquons le théorème α aux deux modules ponctuels $\mathfrak{M}_a$ et $\mathfrak{N}_a$. Soit W un voisinage de la famille $\mathfrak{F}$ de ce théorème, voisinage assez petit pour être contenu dans V. Le module $\mathfrak{M}_W$ engendré par $\mathfrak{M}$ sur W n'est autre que le module de toutes les fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{M}_a$ et sont holomorphes sur W; de même, le module $\mathfrak{N}_W$ n'est autre que le module de toutes les fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{N}_a$ et sont holomorphes sur W. Puisque $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{N}_a$, il s'ensuit que $\mathfrak{M}_W = \mathfrak{N}_W$; on a donc $\mathfrak{M}_E = \mathfrak{N}_E$ pour tout ensemble E contenu dans W.

APPENDICE II.

Variétés analytiques irréductibles.

1. Nous nous bornerons à considérer des *variétés analytiques dans un ensemble ouvert*. Conformément à la définition donnée au paragraphe 1, un ensemble E de points d'un ensemble ouvert D (de l'espace à n dimensions complexes) est une *variété analytique dans* D si tout point de D possède un voisinage V ($V \subset D$) tel que l'intersection $E \cap V$ se compose des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes sur V. Cette définition équivaut à la suivante : l'ensemble E est une variété analytique dans D si E est *fermé* dans D, et si, au voisinage de chaque point a de E, l'ensemble E peut être défini par un nombre fini d'équations $f_k = 0$ (f_k holomorphes au voisinage de a).

Nous dirons qu'une variété E, analytique dans D, est *réductible dans* D, s'il existe deux variétés E_1 et E_2, analytiques dans D, toutes deux distinctes de E, et dont la réunion soit E. Dans le cas contraire, E est dite *irréductible dans* D. Nous nous proposons d'établir rapidement les deux résultats suivants :

Théorème β. — *Toute variété analytique dans* D (*ouvert*) *est réunion d'une famille finie ou dénombrable de variétés analytiques irréductibles dans* D.

Théorème γ. — *Si une fonction holomorphe f dans* D (*ouvert*) *s'annule identiquement sur* E *au voisinage d'un point de* E, *et si* E *est une variété analytique irréductible dans* D, *f s'annule identiquement sur* E.

2. Avant d'aborder les démonstrations, il importe de ne pas confondre la notion *d'irréductibilité dans* D avec celle *d'irréductibilité en un point*. Une variété E analytique dans D est dite *réductible en un point a* de E si a possède un voisinage ouvert V tel qu'il existe deux variétés F_1 et F_2, *analytiques dans* V, contenant toutes deux le point a, dont la réunion soit $E \cap V$ et dont les traces, sur tout voisinage de a, soient toutes deux différentes de la trace de E. Dans le cas contraire, E est dite *irréductible au point a*. On peut relier la notion d'irréductibilité en un point, à celle d'idéal ponctuel. En effet, une variété analytique E définit, en un point a de E, l'idéal $\mathfrak{J}$ de toutes les fonctions

(holomorphes en a) qui s'annulent identiquement sur E dans un voisinage (si petit soit-il) du point a. Pour que E soit irréductible au point a, il faut et il suffit que l'idéal $\mathfrak{J}$ soit *premier;* dans le cas général, $\mathfrak{J}$ est intersection finie d'idéaux premiers, et E est (au voisinage de a) réunion d'un nombre fini de variétés analytiques irréductibles en a. Ces résultats sont classiques (9). Il est aussi classique que l'on peut définir la *dimension* d'une variété irréductible en un point; c'est un nombre entier.

3. Ceci étant rappelé, nous allons montrer comment l'on peut, à toute variété analytique E dans D, associer un *espace topologique* (abstrait) $\mathfrak{E}$. Pour définir $\mathfrak{E}$, il faut d'abord dire quels en seront les *points* : un « point » α de l'espace $\mathfrak{E}$ à définir, c'est par définition l'ensemble d'un point a de E (point a qui s'appellera le *support* du « point » α) et d'une composante irréductible de la variété E au point a. A chaque point α faisons correspondre son support a : on définit une application φ de $\mathfrak{E}$ sur E; un point de E est, en général, le support d'un seul point de $\mathfrak{E}$, mais il y a exception pour les points « singuliers » de E, qui sont support d'un nombre *fini* de points de $\mathfrak{E}$. Reste à définir une topologie sur l'ensemble $\mathfrak{E}$: nous dirons qu'un ensemble $\mathfrak{A}$ de « points » de $\mathfrak{E}$ est *ouvert* si, quel que soit α de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ contient tous les points β dont le support b est suffisamment voisin du support a de α et appartient à la composante irréductible (au point a) attachée à α. Avec cette topologie, l'application φ de $\mathfrak{E}$ sur E, définie plus haut, est *continue*.

On peut alors voir facilement : *pour que la variété analytique* E *soit irréductible dans* D, *il faut et il suffit que l'espace topologique* $\mathfrak{E}$ *soit connexe*.

Donnons simplement des indications rapides sur la démonstration : si E est *réductible* dans D, E est réunion de E_1 et E_2 (analytiques dans D, toutes deux différentes de E); soit $\mathfrak{E}_1$ l'ensemble des « points » de $\mathfrak{E}$ dont le support et la composante irréductible appartiennent à E_1. L'ensemble $\mathfrak{E}_1$ est différent de $\mathfrak{E}$; il est à la fois ouvert et fermé dans $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{E}$ n'est donc pas connexe. Inversement, si $\mathfrak{E}$ n'est pas connexe, E est réductible; en effet, si $\mathfrak{E}$ est réunion de deux sous-ensembles non vides et ouverts $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$, les images E_1 et E_2 de $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ par l'application φ, sont deux variétés analytiques dont l'existence prouve la réductibilité de E.

4. Cela posé, si E est une variété analytique dans D, les composantes connexes de l'espace $\mathfrak{E}$ associé à E fournissent des variétés analytiques irréductibles dont E est la réunion. Pour achever de démontrer le théorème β, il suffit de montrer que *les composantes connexes de* $\mathfrak{E}$ *forment une famille finie ou dénombrable*. Or ceci est une conséquence immédiate du fait que $\mathfrak{E}$ *est réunion dénombrable de sous-ensembles ouverts connexes*.

Reste à prouver le théorème γ. D'une façon plus précise : *si une fonction f, holomorphe dans* D, *s'annule identiquement, au voisinage d'un point a de* E, *sur*

une composante irréductible de E *en a, et si* E *est irréductible dans* D, *alors f s'annule en tout point de* E. Voici quelques indications succinctes sur la démonstration : f définit une fonction g sur l'espace $\mathfrak{E}$, à savoir celle qui, en tout point α de $\mathfrak{E}$, est égale à $f[\varphi(\alpha)]$. Si E est irréductible dans D, $\mathfrak{E}$ est connexe; si f s'annule identiquement, au voisinage d'un point a de E, sur une composante irréductible de E en a, g s'annule sur tout un sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{E}$. Or, l'ensemble des points de $\mathfrak{E}$ au voisinage desquels g s'annule identiquement est *fermé*, comme on s'en assure aisément; donc, si $\mathfrak{E}$ est connexe, g s'annule sur $\mathfrak{E}$ tout entier.

C. Q. F. D.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

I. Donnée de Cousin.
Polycylindre; polycylindre compact.
Variété analytique complexe à $n-1$ dimensions.
Variété analytique complexe quelconque.

II. Idéal de fonctions holomorphes.
Fonction holomorphe *sur* E; idéal *sur* E.
Idéal ponctuel.
Base d'un idéal.
Idéal engendré sur E′ par un idéal sur E.
Fonction à q dimensions; module à q dimensions.
Module sur E, module ponctuel, base d'un module, module engendré, etc.

IV. Système cohérent d'idéaux (ou de modules) ponctuels.
Module associé à un système cohérent.
Module associé à un module.

V. Module parfait.
Module pur.

VII. Module dérivé (d'un système) en un point.
Système faiblement dérivable sur un polycylindre compact.
Système dérivable sur un polycylindre compact.
Module dérivé (d'un système dérivable).

VIII. Module faiblement dérivable, module dérivable.
Modules équivalents.
Module dérivé (d'un module dérivable).
Module r fois dérivable. $r+1$ fois faiblement dérivable.

X. Domaine d'holomorphie.
Domaine polyédral.

CONFIGURATIONS RÉCURRENTES

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. *Introduction.* — Le travail actuel m'a été suggéré par deux articles récents de M. W. Richmond (¹) dont le premier étudie le théorème de Cox :

D'un point O *de l'espace ordinaire à* 3 *dimensions menons divers plans* a_1, a_2, ..., a_n; *sur la droite commune à* a_i, a_j *marquons un point, distinct de* O, *soit* a_ia_j; *on appelle* $a_ia_ja_k$ *le plan déterminé par* a_ja_k, a_ka_i, a_ia_j. *Si* $n=4$, *les* 4 *plans* $\frac{P_4}{a_i}$ $(i=1, 2, 3, 4)$, *en posant* $P_4=a_1a_2a_3a_4$, *concourent en un même point, que l'on appelle* $a_1a_2a_3a_4$. *Pour* $n=5$, *posons* $P_5=a_1a_2a_3a_4a_5$; *les* 5 *points* $\frac{P_5}{a_i}$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ *sont dans un même plan, que l'on appelle* $a_1a_2a_3a_4a_5$. *Et ainsi de suite :* $2n$ *plans* a_1, a_2, ..., a_{2n} *définissent un point* $P_{2n}=a_1a_2\ldots a_{2n}$ *qui est commun aux* $2n$ *plans* $\frac{P_{2n}}{a_i}$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$; $2n+1$ *plans* $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ *définissent un plan, que l'on appellera* $P_{2n+1}=a_1a_2\ldots a_{2n+1}$, *contenant les* $2n+1$ *points* $\frac{P_{2n+1}}{a_i}$ $(i=1, 2, \ldots, 2n+1)$.

Or, beaucoup de théorèmes récurrents admettent cette même forme *alternée*; leur caractéristique est la suivante : on envisage des *éléments géométriques de deux espèces*, points et plans par exemple; ou bien, points et cercles d'une même sphère; ou encore, droites et congruences rectilignes; les uns sont dits *pairs* (pour Cox, les points), les autres, *impairs* (pour le théorème de Cox, les plans); on définit l'*union* de deux éléments de parités opposées : par exemple, le point est dans le plan; ou bien la droite appartient à la congruence. On part d'un élément initial O, qui sera avantageusement représenté par 1 et sera dit pair; on définit des éléments impairs a_1, ..., a_n, unis à O, jouant tous le même rôle vis-à-vis de O, et ensuite, soit l'élément unique a_ia_j uni à a_i, a

(¹) On a chain of theorems due to Homersham Cox; a chain of theorems for lines in space (*J. Lond. Math. Soc.*, 16, 1941, p. 105-107 et 108-112); un addendum de 9 lignes se trouve p. 208, à la fin du même tome.

(par exemple deux cercles a_i, a_j issus de O se recoupent en $a_i a_j$), soit un élément choisi parmi ceux qui sont unis simultanément à a_i, a_j (par exemple, dans le théorème de Cox, un point pris au hasard sur la droite commune aux plans a_i, a_j); on vérifie ou l'on démontre, suivant les cas, qu'il existe un seul élément impair $a_i a_j a_k$ uni à $a_j a_k$, $a_k a_i$, $a_i a_j$; au point de vue analytique, cela revient à vérifier que 3 équations à 3 inconnues ont une solution unique (3 points déterminent un plan, 3 points déterminent un cercle). Cela fait, nous étudions les 4 éléments impairs $a_2 a_3 a_4$, $a_1 a_3 a_4$, $a_1 a_2 a_4$, $a_1 a_2 a_3$: déterminer un élément pair, qui est uni à tous les quatre, revient en général à discuter un système d'équations dont le nombre est supérieur à celui des inconnues: *si ce système est incompatible, le théorème récurrent n'existe pas; si ce système est compatible et a une solution unique, le théorème récurrent alterné existe* et son énoncé est celui de Cox, les mots points et plans étant remplacés par les noms des éléments *pairs* ou *impairs* respectivement substitués à *points* ou *plans*.

J'arrive à ce résultat par un *raisonnement récurrent* qui m'a été suggéré par la comparaison des articles déjà cités et d'un travail de Bianchi [1], où le théorème de Cox est obtenu, incidemment, d'une façon si naturelle que Bianchi ne le signale pas à l'attention spéciale du lecteur; les autres auteurs, quand les éléments $(1; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ont été définis, portent leur attention uniquement sur l'ultime élément $a_1 a_2 \ldots a_n$, tandis que Bianchi montre qu'il faut envisager la totalité des éléments pairs, en nombre 2^{n-1}, représentés par les symboles

$$1; \quad a_1 a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1} a_n; \quad a_1 a_2 a_3 a_4, \quad \ldots$$

à zéro, deux, quatre ... lettres a_i et les éléments impairs

$$a_1, a_2, \quad \ldots, \quad a_n; \quad a_1 a_2 a_3, \quad \ldots; \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \quad \ldots,$$

à une, trois, cinq ... lettres; ces symboles sont ceux que l'on obtient en développant le produit

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n).$$

Chacun des éléments pairs joue le même rôle dans la configuration totale et pourrait servir d'élément origine; chaque élément impair joue aussi le même rôle.

Il est évident que les éléments unis à $(a_\alpha a_\beta \ldots a_\lambda)$, où α, β, ..., λ sont des entiers distincts pris parmi 1, 2, ..., n, s'obtiennent en supprimant de ce produit l'un quelconque des facteurs qui le composent ou en lui ajoutant l'un quelconque de ceux qui n'y entrent pas; donc *chacun des* 2^{n-1} *éléments pairs (ou impairs) est uni à n éléments de parité opposée* et l'on peut décomposer la configuration C_{n-1}, à 2^n éléments pairs et 2^n éléments impairs, définie par

---

[1] *Rendiconti del Cir. mat. di Palermo*, 25, 1908, p. 291-325 : Transformation asymptotique des courbes et des surfaces; congruences W.

$(1; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n-1})$, en la réunion de la configuration C_n provenant de $(1; a_1, \ldots, a_n)$ et d'une autre C'_n, de même nature, dont le symbole de chaque élément s'obtient en multipliant par a_{n-1} les symboles relatifs à C_n; chaque configuration C_n, C'_n offre, par rapport à l'autre, la disposition classique depuis Möbius (qui l'a signalée pour les couples de tétraèdres dits de Möbius) : chacun des éléments de C_n ou C'_n est uni à un élément, et un seul, de parité opposée, de l'autre. C'est ce que Bianchi a appelé *la configuration de Möbius généralisée*; C_{n-1} peut, en faisant jouer à $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n-1}$ ce rôle de multiplicateur ou diviseur, être de $(n+1)$ façons, décomposée en deux configurations de Möbius.

Dans ce travail j'étudie le théorème de Cox; j'expose ensuite le raisonnement récurrent; le théorème de Miquel Clifford est rappelé et je passe aux congruences axiales qui font l'objet du second travail de M. Richmond.

Je donne quelques propriétés des couples de tétraèdres de Möbius, puisque tous les théorèmes récurrents que nous rencontrons reviennent à vérifier ou démontrer une propriété, géométrique ou analytique, analogue à celle de Möbius. Des recherches personnelles sur les cycles orthogonaux à une même inversion me permettent de donner quelques exemples inédits.

Enfin M. Labrousse a bien voulu me communiquer un grand nombre de propositions récurrentes alternées qu'il a rassemblées (1) et nous étudierons des propositions dues à Tzitzeica-Oûe, ou à M. Tadahiko Kubota, ou à M. Pacquement.

Il m'a semblé intéressant de joindre divers énoncés récurrents, mais cette fois non alternés, dus encore à M. Labrousse. Je terminc par une comparaison entre les théorèmes alternés *réguliers* et les théorèmes alternés *irréguliers*.

2. *Théorème de Cox.* — L'énoncé a été donné au paragraphe précédent : le nombre de paramètres engagé pour C_n est : 3 pour le point O, 2 pour chaque a_i, 1 pour chaque $a_i a_j$, soit un total de $3 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}$ ou $\frac{n^2+3n+6}{2}$.

La configuration $C_2(1; a_1, a_2; a_1 a_2)$ est la réunion de $C_1(1, a_1)$ et de $C'_1(a_2, a_1 a_2)$: chaque point de C_1 et C'_1 est uni au plan de l'autre. La configuration $C_3(1; a_1, a_2, a_3; a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2; a_1 a_2 a_3)$ est réunion de $C_2(1; a_1, a_2; a_1 a_2)$ et de $C'_2(a_3; a_1 a_3, a_2 a_3; a_1 a_2 a_3)$ et l'on voit encore que chaque point de C_2 ou C'_2 est uni à un plan et un seul de l'autre.

Jusqu'ici nous n'avons eu à donner que des définitions; la valeur $n = 4$ est la valeur critique; posons $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$; nous avons défini, au moyen de $(1; a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$(1)\qquad \begin{cases} 7 \text{ points} : 1;\ a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_1 a_4,\ a_2 a_3,\ a_2 a_4,\ a_3 a_4; \\ 8 \text{ plans} : a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dfrac{P_4}{a_1},\ \dfrac{P_4}{a_2},\ \dfrac{P_4}{a_3},\ \dfrac{P_4}{a_4}. \end{cases}$$

(1) *Revue de Mathématiques spéciales*, octobre-novembre 1936.

Démontrons que *les 4 derniers plans ont un point commun*, auquel il est naturel d'attribuer le symbole $a_1a_2a_3a_4$. Beaucoup de démonstrations de ce fait ont été données : une des plus simples repose sur le théorème : *sept points déterminent un réseau ponctuel de quadriques, ayant un huitième point commun*. Parmi les quadriques contenant les sept points inscrits sur la première ligne (1), nous apercevons 4 quadriques dégénérées en 2 plans

$$(2)\quad \begin{cases} a_1(\text{points } 1,\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4);\ a_2a_3a_4\ (\text{points } a_2a_3,\ a_2a_4,\ a_3a_4),\\ a_2(\ \ \ \ 1,\ a_2a_1,\ a_2a_3,\ a_2a_4);\ a_1a_3a_4\ (\ \ \ \ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_3a_4),\\ a_3(\ \ \ \ 1,\ a_3a_1,\ a_3a_2,\ a_3a_4);\ a_1a_2a_4\ (\ \ \ \ a_1a_2,\ a_1a_4,\ a_2a_4),\\ a_4(\ \ \ \ 1,\ a_4a_1,\ a_4a_2,\ a_4a_3);\ a_1a_2a_3\ (\ \ \ \ a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_2a_3). \end{cases}$$

Le huitième point commun est situé sur la biquadratique, dégénérée en 4 droites, commune aux deux premières, par exemple, de ces quadriques; une de ces droites ne peut contenir que deux des huit points communs: indiquons les points, déjà connus, situés sur chacune d'elles

$$(3)\quad \begin{cases} (a_1,\ a_2),\ \text{points } (1,\ a_1a_2);\quad (a_1,\ a_1a_3a_4),\ \text{points } (a_1a_3,\ a_1a_4),\\ (a_2,\ a_2a_3a_4),\ \text{point } (a_2a_3,\ a_2a_4);\ (a_2a_3a_4,\ a_1a_3a_4)\ \text{point } (a_3a_4). \end{cases}$$

Ce tableau montre que le huitième point est commun aux deux plans $a_2a_3a_4$, $a_1a_3a_4$; par raison de symétrie, il est aussi dans $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_3$ et la proposition est démontrée. En même temps, nous avons décomposé C_4 en deux configurations

$$C_3(1;\ a_1,\ a_2,\ a_3;\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_2a_3;\ a_1a_2a_3),$$
$$C'_3(a_4;\ a_1a_4,\ a_2a_4,\ a_3a_4;\ a_1a_2a_4,\ a_1a_3a_4,\ a_2a_3a_4;\ a_1a_2a_3a_4),$$

qui donnent chacune les 4 sommets et les 4 faces d'un tétraèdre; ces deux tétraèdres sont en position de Möbius, et réciproquement, tout couple de Möbius peut s'obtenir par le procédé de Cox.

3. *Raisonnement récurrent.* — Nous supposons avoir vérifié le théorème de Cox jusqu'à une certaine valeur de n, soit n_0 (jusqu'ici, il a été vérifié jusqu'à $n_0 = 4$); nous avons reconnu que, dans la configuration C_{n_0} et dans toutes celles qui la précèdent, chaque élément pair (ou impair) joue le même rôle; chaque point, réuni aux plans, en nombre n_0, qui en sont issus, peut servir à reconstituer toute la configuration.

Comme cette valeur de n_0, à savoir $n_0 = 4$, est paire, nous allons supposer, en changeant légèrement la notation, que nous ayons fait ces vérifications pour la configuration d'ordre pair C_{2n} définie avec $(1;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n})$; introduisons le plan a_{2n+1} issu de O et choisissons les points $a_1a_{2n+1},\ \ldots,\ a_{2n}a_{2n+1}$. La proposition démontrée pour 4 plans tels que a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}, prouve

que les 4 plans suivants concourent en un même point

$$(4)\quad \begin{cases} \text{plan } a_{2n-1}a_{2n}\ a_{2n-1} \text{ des points } a_{2n-1}a_{2n}, & a_{2n-1}a_{2n+1}, a_{2n}\ \ a_{2n-1}, \\ \text{» } a_{2n-2}a_{2n}\ a_{2n-1} \text{ » } & a_{2n-2}a_{2n}, \quad a_{2n-2}a_{2n+1}, a_{2n}\ \ a_{2n-1}, \\ \text{» } a_{2n-2}a_{2n-1}a_{2n-1} \text{ » } & a_{2n-2}a_{2n-1}, a_{2n-2}a_{2n+1}, a_{2n-1}a_{2n-1}, \\ \text{» } a_{2n-2}a_{2n-1}a_{2n} \text{ » } & a_{2n-2}a_{2n-1}, a_{2n-2}a_{2n}, \quad a_{2n-1}a_{2n}. \end{cases}$$

Nous allons substituer aux plans et points qui figurent dans ce tableau ceux que l'on obtient en multipliant tous les symboles par $a_1a_2\ldots a_{2n-2}$ et supprimant a_{2n-2} quand il est répété deux fois : cela revient à appliquer le résultat de Möbius-Cox au point $a_1a_2\ldots a_{2n-2}$, pris comme origine au lieu de O (ou 1) et aux plans $a_1a_2\ldots a_{2n-3}$, $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n-1}$, $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n}$, $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n+1}$ issus de cette nouvelle origine; le point $a_{2n-2}a_{2n-1}$ commun à a_{2n-2} et a_{2n-1} est remplacé par le point $a_1a_2\ldots a_{2n-3}a_{2n-1}$ commun aux plans $a_1a_2\ldots a_{2n-3}$ et $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n-1}$; de même $a_{2n-1}a_{2n}$ est remplacé par $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n-1}a_{2n}$ commun aux plans $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n-1}$ et $a_1a_2\ldots a_{2n-2}a_{2n}$; nous allons poser $P_{2n-1}=a_1a_2\ldots a_{2n}a_{2n-1}$, ce symbole P_{2n-1} n'étant, pour l'instant, qu'une abréviation d'écriture; les trois derniers plans du tableau (4) sont remplacés par les plans de symbole abrégé $\frac{P_{2n-1}}{a_{2n-2}a_{2n-1}}$, $\frac{P_{2n-1}}{a_{2n-2}a_{2n}}$, $\frac{P_{2n-1}}{a_{2n-2}a_{2n-1}}$, plans qui, d'après les résultats obtenus pour une configuration déduite de O et des $2n$ plans initiaux $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-3}, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n-1}$ concourent au point de symbole $\frac{P_{2n-1}}{a_{2n-2}}=a_1a_2\ldots a_{2n-3}a_{2n-1}a_{2n}a_{2n-1}$; ce point est aussi dans le plan qui se déduit, par notre changement d'origine, du plan de la première ligne (4): pour ce plan, nous ne pouvons faire immédiatement la multiplication sur le symbole $a_{2n-1}a_{2n}a_{2n-1}$, car nous ne savons pas encore ce que signifie un symbole à $2n+1$ lettres, mais nous ne pouvons donner les symboles des trois points qui définissent notre plan transformé : ce sont les points

$$\frac{P_{2n-1}}{a_{2n-1}},\quad \frac{P_{2n-1}}{a_{2n}},\quad \frac{P_{2n-1}}{a_{2n-1}}.$$

Leur plan contient le point $\frac{P_{2n-1}}{a_{2n-2}}$ commun aux trois autres plans du tableau (4). Autrement dit, en raison de la symétrie du rôle des lettres a pour $i=1, 2, \ldots, 2n+1$, nous constatons que quatre *quelconques* des points $\frac{P_{2n-1}}{a_i}$ sont dans un même plan : *ils sont donc tous dans un même plan* que nous représentons par le symbole $a_1a_2\ldots a_{2n}a_{2n-1}$. *Nous avons ainsi vérifié que la configuration* C_{2n-1} *contient* 2^n *points,* 2^n *plans, qu'il y a symétrie entre les rôles des points et les rôles des plans, que chaque point appartient à* $2n+1$ *plans et que chaque plan contient* $2n+1$ *points.*

Étendons, de la même façon, le résultat à la configuration obtenue en ajoutant à la précédente C_{2n-1} le $(n+2)^{\text{ième}}$ plan a_{2n-2}. Les quatre derniers

plans issus de O, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2} fournissent 4 plans à 3 lettres, $a_{2n}a_{2n+1}a_{2n+2}$, $a_{2n-1}a_{2n+1}a_{2n+2}$, $a_{2n-1}a_{2n}a_{2n+2}$, $a_{2n-1}a_{2n}a_{2n+1}$, concourant au même point; en multipliant par $a_1a_2\ldots a_{2n-2}$, c'est-à-dire, géométriquement parlant, en prenant pour nouvelle origine le point $a_1a_2\ldots a_{2n-2}$, nous avons encore 4 plans concourants, de symboles

$$\frac{P_{2n+2}}{a_{2n-1}},\quad \frac{P_{2n+2}}{a_{2n}},\quad \frac{P_{2n+2}}{a_{2n+1}},\quad \frac{P_{2n+2}}{a_{2n+2}},$$

où $P_{2n+2}=a_1a_2\ldots a_{2n+1}a_{2n+2}$; les symboles à $(2n+1)$ lettres ont été définis, et les vérifications se feraient comme plus haut. Mais alors, quatre *quelconques* des plans $\frac{P_{2n+2}}{a_i}$ sont concourants, autrement dit *tous ces plans concourent* en un même point qu'il est naturel d'appeler $a_1a_2\ldots a_{2n+2}$. *La chaîne se poursuit donc indéfiniment.*

La forme de raisonnement est indépendante de la nature des éléments introduits, pourvu qu'ils soient partagés en deux catégories, l'une *paire*, l'autre *impaire*, que l'on ait su définir l'*union* de deux éléments de parités différentes et que les éléments de même parité jouent tous le même rôle.

4. *Configuration de Möbius.* — Les tétraèdres de Möbius jouent un rôle important dans beaucoup de questions géométriques; leur existence paraît un peu mystérieuse et pourtant nous allons pouvoir, par un dessin simple, prouver, expérimentalement, si j'ose dire, leur existence.

M. Charles H. Rowe et moi avons écrit en collaboration une étude sur ces tétraèdres (¹); adoptons la notation plus commode ABCD, A′B′C′D′, A étant dans le plan B′C′D′ et A′ dans le plan BCD, et de même pour les autres sommets. Un couple connu fournit 3 autres couples, suivant le schéma

ABCD	ABC′D′	AB′CD′	AB′C′D
A′B′C′D′	A′B′CD	A′BC′D	A′BCD′

Ce résultat a été prévu au paragraphe 1. La construction de Cox à partir de A, pris comme origine, des plans ACD, ABD, ABC, B′C′D′ et des points B, C, D, B′, C′, D′ placés sur les six arêtes issues de A, donne le point A′ commun aux plans BCD, BC′D′, B′CD′, B′C′D. Un résultat, connu depuis longtemps, est que *les segments* AA′, BB′, CC′, DD′ *sont partagés harmoniquement par le couple* (*unique, formé de 2 droites distinctes*) Δ, Δ′ *des sécantes communes aux droites supports de ces segments.*

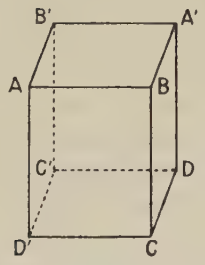
Un autre résultat, donné par M. Rowe, est que *toutes les quadriques du réseau déterminé par les huit sommets admettent* Δ, Δ′ *comme droites conjuguées; réci-*

(¹) *Annales Sc. de l'École Norm. Sup.*, 3, LVI, 1939 p. 71-118 et 3, LVIII, 1941, p. 261-280.

proquement, les huit points communs à trois quadriques ayant un couple commun de droites conjuguées Δ, Δ′ *se répartissent* (*de* 4 *façons*) *aux sommets de deux tétraèdres de Möbius.*

Cette dernière propriété nous conduit au cas très particulier où les quadriques du réseau sont conjuguées par rapport à un tétraèdre donné : chaque couple d'arêtes opposées peut jouer le rôle de Δ, Δ′ et nous aurons 12 façons de séparer les points communs en sommets de deux tétraèdres de Möbius. Une transformation homographique permet de remplacer le tétraèdre conjugué commun par celui dont les sommets sont O et les points à l'infini sur les arêtes du trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz et, même, de supposer que les huit points communs sont les sommets d'un cube (*fig.* 1). Cheminons sur 3 arêtes consécutives, parallèles aux trois directions Ox, Oy, Oz; nous avons

Fig. 1.



ainsi les sommets A, B, C, D d'un premier tétraèdre; la symétrie, dont l'axe est la parallèle issue du centre du cube à l'arête BC, change A, B, C, D en A′, B′, C′, D′. Le plan BCD contient A′; le plan ACD contient B′, car AB′ est parallèle à CD; ABD contient C′, car DC′ est parallèle à BA; ABC contient D′; la symétrie échangeant les deux tétraèdres, prouve que A, B, C, D sont chacun dans les plans B′C′D′, A′C′D′, A′B′D′, A′B′C′. Il y a 12 arêtes; BC fournit deux circuits possibles ABCD, A′BCD′, de sorte que nous avons ainsi les 24 tétraèdres ou 12 couples annoncés.

Rappelons *que l'on obtient le couple général de Möbius* (17 *paramètres*) *avec un tétraèdre quelconque* ABCD (12 *paramètres*) *et un complexe linéaire quelconque* (5 *paramètres*) *et prenant les pôles* A′, B′, C′, D′ *des faces* BCD, ACD, ABD, ABC. On peut encore *prendre une quadrique* Q *quelconque* (9 *paramètres*), *un tétraèdre* ABCD *conjugué* (6 *paramètres*), *deux génératrices* Δ, Δ′ *de même système de* Q (2 *paramètres*); *l'involution biaxiale d'axes* Δ, Δ′ *remplace* ABCD *par le tétraèdre* A′B′C′D′, *en position de Möbius avec* ABCD.

Remarquons encore, qu'une configuration C_n étant construite, sa transformée C'_n relativement à un complexe linéaire quelconque est en position de Möbius avec C_n, l'ensemble (C_n, C'_n) étant une configuration C_{n+1} de Cox; mais, dans la construction générale de Cox, le passage d'une C_n à une C_{n+1} se fait en

donnant a_{n-1}, puis choisissant les points $a_1 a_{n-1}$ ..., $a_n a_{n-1}$ ce qui introduit $n+2$ paramètres nouveaux : or $n+2$ surpasse 5 si n surpasse 3.

5. *Théorème de Miquel et Clifford.* — La forme usuelle de l'énoncé est la suivante : *dans un plan, deux droites* a_1, a_2 *déterminent un point* $a_1 a_2$; *trois droites* a_1, a_2, a_3 *conduisent au cercle* $a_1 a_2 a_3$ *circonscrit aux* trois *points* $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$; *avec quatre droites* a_1, a_2, a_3, a_4, *en posant* $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$, *les quatre cercles* $\frac{a_i}{P_4}$ *ont un point commun* P_4...; *et ainsi de suite, par le même processus récurrent.*

L'élément pair initial n'est pas signalé; mais, puisque par inversion, des droites se transforment en cercles ayant le pôle comme point commun, il est naturel de transformer par inversion l'énoncé primitif et nous obtenons l'énoncé général récurrent étudié dans l'introduction, *où l'élément pair initial* 1 *est le point* O, *et où* a_1, a_2 *sont des cercles issus de* O *dans le plan; l'élément* $a_1 a_2$ *est le nouveau point commun à* a_1, a_2 : cette fois-ci, il n'y a plus de paramètre intervenant pour le choix de $a_1 a_2$.

Il y a avantage, soit pour l'énoncé initial, soit pour le nouveau, à transformer par inversion avec un pôle situé hors du plan de la figure. *L'élément initial* O (*ou* 1) *est arbitraire dans l'espace; les éléments* a_1, a_2, ..., *sont des cercles issus de* O *sur une même sphère.*

Revenons au théorème de Cox, avec ce point O et des plans a_1, a_2, a_3, a_4 issus de O; les 6 points $a_i a_j$ seront choisis aux points où chaque droite (a_i, a_j) recoupe la sphère S; les 4 plans $\frac{P_4}{a_i}$ ont un point commun $a_1 a_2 a_3 a_4$ appartenant à toutes les quadriques passant par O et les points $a_i a_j$, donc ce point nouveau est aussi sur la sphère S et les plans $\frac{P_4}{a_i}$ coupent S suivant quatre cercles ayant un même point commun : c'est le théorème de Miquel et Clifford démontré pour $n=4$, *donc, grâce à notre raisonnement récurrent, démontré pour toute valeur de* n.

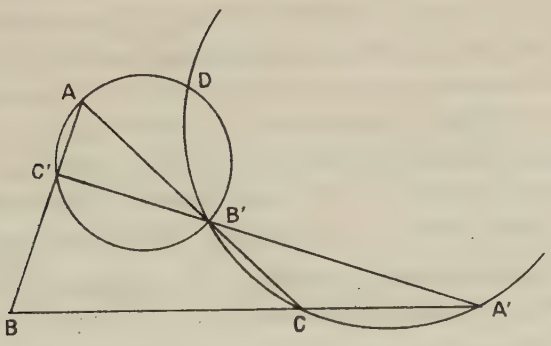
Le théorème de Miquel et Clifford est donc un cas particulier du théorème de Cox : si, dans la construction de Cox, on imagine une quadrique Q, issue de O, et si chaque point $a_i a_j$ est choisi au nouveau point de rencontre de la droite (a_i, a_j) avec Q, tous les points successifs, qui sont nos éléments pairs, sont tous sur Q. *Il me semble intéressant de signaler que, réciproquement, la démonstration, du théorème de Miquel et Clifford suffit pour pouvoir énoncer le théorème, plus général, de Cox :* en effet, pour $n=4$, les deux théorèmes coïncident et le raisonnement récurrent exige seulement que la proposition soit démontrée pour $n=4$. On peut, à cette affirmation qui n'est pas adoptée par les auteurs précédents, faire la critique suivante : pour remonter du théorème de Miquel-Clifford à celui de Cox, il faut savoir que l'on peut passer d'une quadrique à une autre par une transformation homographique, afin que la démonstration,

faite sur la sphère pour $n=4$, puisse s'étendre au théorème de Cox, toujours pour $n=4$; si cette proposition sur l'homographie est admise, on n'a plus besoin, pour établir le théorème de Cox, pour $n=4$, de savoir que les quadriques qui ont en commun sept points en ont un huitième commun à toutes.

Remarquons que le théorème de Cox, pour $n=4$, fait vérifier que 4 plans ont un point commun : analytiquement parlant, on a 4 équations linéaires à 3 inconnues, qui sont compatibles. Sur la sphère, ou dans le plan, on a 4 cercles qui doivent avoir un point commun, donc analytiquement parlant, 4 équations quadratiqnes à 2 inconnues, qui ont une solution commune.

Démontrons, élémentairement, le théorème de Miquel et Clifford, en nous bornant à $n=4$ et supposant que l'élément initial soit le point à l'infini du plan; nous avons un triangle ABC (*fig.* 2) coupé par la transversale A′B′C′; les

Fig. 2.



deux cercles AB′C′, CA′B′ se coupent en B′ et en un nouveau point D; on a, entre les angles orientés de droites non orientées, les égalités, vraies à $k\pi$ près.

$$(DA, DB') = (C'A, C'B') = (BA, A'B'C'),$$
$$(DB', DC) = (A'B', A'C) = (A'B'C', BC).$$

En ajoutant, on a

$$(DA, DC) = (BA, BC);$$

A, B, C, D sont donc sur un même cercle; on peut échanger les rôles de A et C, de C′ et A, en remplaçant la droite AB′C par la droite C′B′A′, par suite C′, B, A′, D sont sur un même cercle.

Rappelons que Lebesgue a réuni un grand nombre de démonstrations du théorème de Miquel et Clifford, en apportant sa contribution personnelle (¹).

6. *Congruences axiales de droites orientées.* — Ce paragraphe reproduit l'essentiel du second Mémoire de M. Richmond. Un axe A (qu'il n'est pas

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4ᵉ série, 16, 1916, p. 481-495.

indispensable d'orienter) est donné et une droite orientée $\vec{O}$ peut tourner d'un angle arbitraire autour de A et subir une translation, d'amplitude arbitraire, parallèle à A; on obtient ainsi une *congruence axiale* dont les caractéristiques sont au nombre de 6 : 4 pour l'*axe*, 1 pour l'*angle* de la congruence, c'est-à-dire l'angle constant, compris entre o et π, d'une droite quelconque de la congruence et de l'axe (préalablement orienté), 1 pour le *rayon*, c'est-à-dire la plus courte distance de l'axe et d'une génératrice. Les projections des droites sur un plan perpendiculaire à l'axe sont des droites orientées toutes tangentes à un même cycle, ayant même axe et rayon que la congruence. On peut appeler *cône directeur* le demi-cône de révolution de sommet ω, dont les génératrices sont les demi-droites issues de ω parallèles aux droites de la congruence; la base de ce demi-cône sur la sphère unité de centre ω peut être appelée *cercle directeur*.

Deux congruences axiales a_1 (*axe* A_1, *angle* φ_1 *rayon* r_1) *et* a_2 (*axe* A_2, *angle* φ_2, *rayon* r_2) *ont deux génératrices communes et deux seulement :* leurs cercles directeurs se coupent en deux points α et β; les droites de a_1 parallèles à $\vec{\omega\alpha}$ sont dans un plan parallèle à $\omega\alpha$, de même pour a_2; l'intersection de ces deux plans est l'unique droite relative à α. Si D est une droite rencontrant à angle droit l'axe A d'une congruence a, la symétrie d'axe D change a en la même congruence, *changée de sens* : c'est évident, en prenant d'abord pour D la perpendiculaire commune à A et une génératrice, puis remarquant qu'un mouvement de verrou autour de A ne change pas la congruence. Si donc a_1, a_2 résultent de la rotation d'une droite orientée $\vec{O}$ autour de A_1 ou A_2, il suffira de construire la perpendiculaire D commune à A_1, A_2, puis de faire tourner de π la droite $(-\vec{O})$ autour de D pour avoir la droite orientée, autre que $\vec{O}$, commune à a_1, a_2.

Trois droites orientées $\vec{O_1}$, $\vec{O_2}$, $\vec{O_3}$ *définissent une seule congruence axiale*, dont le cône directeur s'obtient en menant par ω les demi-droites parallèles à $\vec{O_1}$, $\vec{O_2}$, $\vec{O_3}$; en projetant $\vec{O_1}$, $\vec{O_2}$, $\vec{O_3}$ sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône directeur, nous obtenons trois droites orientées $\vec{o_1}$, $\vec{o_2}$, $\vec{o_3}$ tangentes à un cycle unique, dont l'axe est celui de la congruence cherchée.

Une droite orientée peut être définie par un vecteur $+1$ porté sur elle, c'est-à-dire par les projections (x, y, z) de ce vecteur sur les 3 droites rectangulaires Ox, Oy, Oz et par les moments (l, m, n) de ce vecteur relativement à ces trois axes. On a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad lx + my + nz = 0.$$

Écrivons

$$X = x + l\varepsilon, \qquad Y = y + m\varepsilon, \qquad Z = z + n\varepsilon$$

où ε est un symbole jouissant des propriétés suivantes : l'égalité $a + a'\varepsilon = b + b'\varepsilon$

revient à $a=b$, $a'=b'$; la somme $(a+a'\varepsilon)+(b+b'\varepsilon)$ est $a+b+(a'+b')\varepsilon$: le produit $(a+a'\varepsilon)(b+b'\varepsilon)$ est $ab+(ab'+a'b)\varepsilon$; autrement dit la multiplication $(a_1+a'_1\varepsilon)(a_2+a'_2\varepsilon)\ldots(a_n+a'_n\varepsilon)$ se fait en opérant comme si ε était une variable habituelle, puis en réduisant le produit à son terme constant et à son terme du premier degré en ε. La droite orientée (x, y, z, l, m, n) envisagée plus haut est donc connue si l'on donne X, Y, Z, quantités complexes qui vérifient la relation $X^2+Y^2+Z^2=1$. Si $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sont les quantités analogues relatives à un axe orienté $\vec{A}_1$, on a

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1, \qquad \lambda_1\alpha_1+\mu_1\beta_1+\nu_1\gamma_1=0;$$

en posant

$$\xi_1=\alpha_1+\lambda_1\varepsilon, \qquad \eta_1=\beta_1+\mu_1\varepsilon, \qquad \zeta_1=\gamma_1+\nu_1\varepsilon,$$

on a

$$\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=1;$$

la congruence axiale d'axe $\vec{A}_1$ et de génératrice $\vec{O}(x_0, y_0, z, l_0, m_0, n_0)$ ou simplement (X_0, Y_0, Z_0) avec $X_0^2+Y_0^2+Z_0^2=1$ est caractérisée par l'équation

$$X\xi_1+Y\eta_1+Z\zeta_1=X_0\xi_1+Y_0\eta_1+Z_0\zeta_1=K_1$$
$$(X^2+Y^2+Z^2=1,\ \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=1,\ X_0^2+Y_0^2+Z_0^2=1).$$

La partie réelle de K_1 *est le cosinus de l'angle* V_1 *de la congruence et le coefficient de* ε *dans* K_1 *est* $\Delta_1 \sin V_1$ *où* Δ_1 *est le rayon de la congruence, pris positivement ou négativement suivant que le moment relatif des segments unitaires portés par* $\vec{A}_1$ *et* $\vec{O}$ *est positif ou négatif.*

Il est clair, d'après cela, qu'*une congruence axiale* a_1 *est parfaitement définie par un cercle* (*complexe*) *de la sphère unité* ω. Le théorème de Miquel et Clifford s'étend aux cercles complexes, puisque les calculs de vérification sont les mêmes que pour les cercles ordinaires.

Nous avons donc un théorème récurrent *où l'élément pair initial est une droite orientée* $\vec{O}$ (*ou* 1) *et où les éléments impairs* $a_1, \ldots, a_n$ *initiaux sont les congruences axiales d'axes* $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$, *quelconques, dont* $\vec{O}$ *est une génératrice;* a_1a_2 est la nouvelle droite orientée commune à a_1, a_2 (vérification faite plus haut), $a_1a_2a_3$ la congruence unique définie par a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 (vérification faite plus haut); en posant $P_4=a_1a_2a_3a_4$, les 4 congruences $\frac{P_4}{a_i}$ ont une droite, unique, commune : vérification faite par le théorème de Miquel et Clifford étendu aux cercles complexes. La chaîne récurrente s'en déduit. On doit remarquer qu'il a fallu non seulement démontrer le théorème pour $n=4$, mais donner des explications, détaillées, déjà pour $n=2$ et $n=3$.

7. *Congruences axiales de cycles.* — J'ai montré (¹) que tout cycle $\vec{A}$ orthogonal à l'inversion négative de pôle O et puissance $-R^2$ peut être représenté par les pieds (a, α) de ses focales orientées, positive et négative, relatives à O, sur les feuillets sphériques de centre commun O et de rayon R; deux cycles $\vec{A}$, $\vec{B}$ de cette espèce, sécants, donc bisécants, ont des images (a, α), (b, β) caractérisées par $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$, la valeur commune de $\frac{\widehat{ab}}{R}$ et $\frac{\widehat{\alpha\beta}}{R}$ étant l'angle des deux cycles; si a', α' sont les points diamétralement opposés à a et α, les deux cycles (a, α) (a', α') ont même support, mais sont opposés; les deux cycles (a, α), (a, α') sont axiaux. Une rotation anallagmatique d'amplitude φ et d'axe (a, α) fait tourner les feuillets, positif et négatif, autour de $\overrightarrow{Oa}$ ou $\overrightarrow{O\alpha}$ respectivement, du même angle φ. Toute opération sphérique conforme directe conservant l'inversion négative I en jeu se traduit par une rotation d'amplitude φ autour d'un certain cycle $\vec{A}(a, \alpha)$ orthogonal à I et une rotation d'amplitude ψ autour du cycle conjugué $\vec{A}'(a, \alpha')$, les deux rotations pouvant se faire dans un ordre quelconque; le feuillet positif tourne de l'angle $(\varphi + \psi)$ autour de $\overrightarrow{Oa}$, le feuillet négatif de $(\varphi - \psi)$ autour de $\overrightarrow{O\alpha}$.

Considérons sur le feuillet positif un cercle quelconque, de pôle sphérique a_1, et sur le feuillet négatif un cercle quelconque, de pôle sphérique α_1; les ∞^2 cycles orthogonaux à I, dont l'image positive est sur le premier cercle et la négative sur le second dérivent tous de l'un d'eux par des rotations anallagmatiques arbitraires effectuées successivement autour de (a_1, α_1), (a_1, α_1'). Nous appellerons une telle congruence, *congruence axiale* d'axes (a_1, α_1), (a_1, α_1'); les *invariants* de cette congruence sont les rayons sphériques des deux cercles portant les images positives et négatives des cycles de cette congruence orientée.

Le théorème de Miquel et Clifford pour chacun des feuillets sphériques *permet d'énoncer, pour les congruences axiales de cycles, tous orthogonaux à une même inversion négative* I, *le même théorème que pour les congruences axiales de droites.*

L'élément pair initial est un cycle Ω *orthogonal à* I; *les éléments impairs initiaux* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont des congruences axiales de cycles orthogonaux à* I, *définies par leurs axes* (a_1, α_1), (a_2, α_2) $\ldots$, (a_n, α_n) *tous orthogonaux à* I *et leurs* 2 *invariants respectifs :* dans la configuration C_n, on a 2^{n-1} cycles, 2^{n-1} congruences, chaque cycle étant commun à n congruences et chaque congruence contenant n cycles.

(¹) *Mém. Sc. math.*, fascicule CIV, Paris, Gauthier-Villars, 1944, *Cycles paratactiques.*

8. *Configurations de semi-cyclides de Dupin.* — Employons encore notre représentation de cycles orthogonaux à l'inversion I de pôle O et puissance $(-R^2)$. Choisissons, une fois pour toutes, un point α du feuillet négatif; un cercle du feuillet positif, de pôle sphérique a et de rayon sphérique $R\varphi$, peut être considéré comme l'image d'une semi-cyclide de Dupin, d'axe anallagmatique (a, α), engendrée par un cycle de Villarceau de cette cyclide en tournant autour de (a, α); l'image positive de chaque cercle de Villarceau est un point du cercle de pôle a défini plus haut et son image négative est α.

On choisit un point o sur le feuillet positif et des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de ce feuillet; on envisage les demi-cyclides $a_1, a_2, \ldots, a_n$ engendrées par la rotation du cycle (o, α) autour de $(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), \ldots, (A_n, \alpha)$; deux de ces demi-cyclides a_1, a_2 ont un unique cycle commun autre que (o, α), soit $a_1 a_2$ et nous continuons par notre processus habituel; *les éléments pairs sont des cycles, tous paratactiques négativement entre eux, puisque leur image négative est* α*: les éléments impairs sont des demi-cyclides.* Répéter l'énoncé complet serait fastidieux.

9. *Théorème de Tzitzeica-Oûe.* — Nous avons donné diverses applications, les unes de nature *anallagmatique*, les autres de nature *projective*. Voici une application *métrique* due au géomètre japonais S. Oûe (1), retrouvée par Tzitzeica qui ignorait le travail de Oûe. Nous empruntons à M. Labrousse (*loc. cit.*) l'énoncé de Tzitzeica :

Soient A_1, A_2, A_3 *trois points quelconques sur un cercle* Γ *de rayon* R. *Les cercles de centres* A_1, A_2, A_3 *et de rayon* R *se coupent* 2 *à* 2 *en* 3 *points autres que* O; *soit* Σ_3 *le cercle passant par ces* 3 *points; on fait correspondre* Σ_3 *à* A_1, A_2, A_3. *Étant donnés quatre points de* Γ, *à leurs combinaisons* 3 *à* 3 *correspondent quatre cercles* Σ_3, *dont les centres sont sur un cercle* Σ_4, *et qui passent par un même point* P_4. *D'une manière générale, on fait correspondre un cercle* Σ_n *à* n *points du cercle* Γ: *soient* $(n+1)$ *points de* Γ : *les* $(n+1)$ *cercles* Σ_n *correspondant à leurs combinaisons* n *à* n *passent par un même point* P_{n+1} *et ont leurs centres sur un même cercle* Σ_{n+1}. *Les cercles* $\Sigma_3, \Sigma_4, \ldots$ *ont tous même rayon* R.

Cette proposition revient à la suivante : reprenons le théorème de Miquel et Clifford, *en supposant que les* n *cercles* $a_1, \ldots, a_n$ *issus du point initial* O *aient tous le même rayon* R : *tous les cercles successivement introduits ont le même rayon* R. *On forme une configuration de même nature en remplaçant chaque point de la configuration de Miquel et Clifford par le cercle de rayon* R *centré en ce point et chaque cercle de Miquel et Clifford par son centre :* les deux configurations ainsi obtenues sont *réciproques* et s'échangent par une *dilatation* de module R

(1) *Tohoku Mathematical Journal*, 1916, p. 225-228.

(le module étant la longueur portée sur le rayon, orienté positivement vers le centre).

La démonstration est intuitive et, d'ailleurs, ne fait usage ni du théorème de Miquel ni de notre raisonnement récurrent. Les points A_i, centres des cercles a_i, ont pour coordonnées, si O est pris pour origine, $(R\cos\varphi_i, R\sin\varphi_i)$. Il est clair que le point de coordonnées

$$R(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\ldots+\cos\varphi_p),\qquad R(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\ldots+\sin\varphi_p)$$

est à la distance R de tout point obtenu en supprimant un seul terme $(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$ dans ces deux parenthèses, ou en ajoutant $\cos\varphi_{p+1}$, dans l'une, et $\sin\varphi_{p+1}$ dans l'autre parenthèse; cette remarque si simple démontre l'existence des deux configurations; $R(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)$, $R(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)$ sont les coordonnées du point a_1a_2; le centre du cercle $a_1a_2a_3$ est

$$R(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3),\qquad R(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\sin\varphi_3).$$

le point $a_1a_2a_3a_4$ est

$$R(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3+\cos\varphi_4),\qquad R(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\sin\varphi_3+\sin\varphi_4),$$

et ainsi de suite, indéfiniment.

Les deux configurations qui s'échangent par dilatation ne sont pas inscrites-circonscrites l'une à l'autre; pour $n=2$, par exemple, nous avons deux cercles, de rayon R, a_1, a_2 issus de O; a_1, a_2 sont remplacés par leurs centres α_1, α_2 et les points O, a_1a_2 par des cercles de rayon R, ω et $\alpha_1\alpha_2$; la figure montre que les 4 cercles a_1, a_2, ω, $\alpha_1\alpha_2$ ne comprennent aucun groupe de trois cercles ayant un point commun.

L'énoncé donné par S. Oüe est le suivant : *soient trois points* B_1, B_2, B_3 *sur un cercle* Γ'; *on leur fait correspondre le cercle* Γ_3 *des neuf points du triangle* $B_1B_2B_3$; *étant donnés* 4 *points* B_1, B_2, B_3, B_4 de Γ', *à leurs combinaisons* 3 *à* 3 *correspondent quatre cercles* Γ_3 : *ces* 4 *cercles ont un point commun* P_4 *que l'on fait correspondre aux* 4 *points. Étant donnés* 5 *points* de Γ', *à leurs combinaisons* 4 *à* 4 *correspondent* 5 *points* P_4 *qui sont sur un même cercle* Γ_3 *que l'on fait correspondre aux* 5 *points donnés, et ainsi de suite indéfiniment.*

Introduisons les milieux A_1, A_2, ... des rayons OB_1, OB_2, ...; ils sont sur un même cercle Γ de rayon R et, puisque les deux cercles de rayon R et centres A_1, A_2 se recoupent au milieu de B_1B_2, *les deux énoncés de Tzitzeica et de S. Oüe coïncident.*

Dans l'un ou l'autre énoncé, on s'aperçoit que les théorèmes récurrents font intervenir alternativement des points et des cercles : donc, pour pouvoir appliquer notre méthode et surtout le raisonnement récurrent, on a besoin de faire intervenir, au début, un point fixe O et des cercles a_1, a_2, ..., a_n qui y

passent : en remarquant qu'ils ont tous le même rayon R, nous apercevons l'identité des deux énoncés. Nous aurons de même, pour d'autres exemples de théorèmes récurrents, à rétablir la symétrie dès le début quand ce sera possible; cela nous permettra ou bien d'énoncer un théorème plus général ou bien de reconnaître que le théorème récurrent alterné proposé ne rentre pas dans la catégorie de ceux que nous étudions (¹)

10. Théorème de Tadahiko Kubota (²). — *On considère des cycles* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tangents à une même droite orientée* $\vec{O}$ (employons le mot abrégé : *flèche*); a_1, a_2 *ont une unique flèche tangente commune nouvelle*, a_1a_2. *Les* 3 *flèches* a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 *sont tangentes à un seul et même cycle* $a_1a_2a_3$. *Étant donnés* 4 *cycles* a_1, a_2, a_3, a_4 *tangents à* $\vec{O}$, *et posant*, $P_4 = a_1a_2a_3a_4$, *les* 4 *cycles* $\frac{P_4}{a_i}$ *ont une même flèche tangente commune* $a_1a_2a_3a_4$, *et ainsi de suite indéfiniment.*

Les éléments pairs sont des flèches, les éléments impairs des cycles. Rappelons quelques notions sur les cycles et leurs flèches tangentes. Un cycle décrit dans le sens direct (ou rétrograde) est régardé comme ayant un rayon R positif (ou négatif); si le centre est pris pour origine, un point m du cercle a pour coordonnées $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$ et un point M de la tangente, $R(\cos\alpha - \lambda\sin\alpha)$, $R(\sin\alpha + \lambda\cos\alpha)$; la valeur algébrique du segment $\overline{m\mathrm{M}}$ est λR, car le sens positif sur la flèche est celui qui correspond à la circulation sur le cycle. Les deux tangentes au cercle aux points $m(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ et $m_1(R\cos\beta, R\sin\beta)$ se coupent au point M représenté indifféremment par

$$R(\cos\alpha - \lambda\sin\alpha), \quad R(\sin\alpha + \lambda\cos\alpha)$$

ou

$$R(\cos\beta + \lambda\sin\beta), \quad R(\sin\beta - \lambda\cos\beta)$$

avec $\lambda = \operatorname{tang}\frac{\beta - \alpha}{2}$; ce résultat met en évidence que les deux segments $\overline{m\mathrm{M}}$ $\overline{m_1\mathrm{M}}$ sont mesurés par des nombres opposés. Démontrons, d'une façon

(¹) Il y aurait beaucoup de propriétés géométriques intéressantes à développer, mais elles sortent de notre sujet précis. Une inversion de pôle P non situé dans le plan A des cercles égaux a_1, a_2, ..., a_n donne une sphère S, des cercles a'_1, ..., a'_n tous issus d'un point O′ de S, tels que les pôles de leurs plans soient répartis sur la conique σ commune au plan tangent à S en O′ et au cône qui a pour sommet P et pour directrice le cercle ω contenant les centres de a_1, a_2, ..., a_n: cette conique σ a pour foyer O′ et, pour directrice correspondante D, l'intersection des plans tangents à S en P et O′, puisque, par perspective, O′ et cette directrice deviennent O et la droite à l'infini du plan contenant O, a_1, a_2, ..., a_n. Les plans des cercles a'_1, ..., a'_n enveloppent le cône C qui a son sommet en O, transformé par polarité de σ; ce cône a pour base dans le plan tangent à S en P une conique qui admet P pour foyer et pour directrice correspondante la droite D; le plan tangent en O′ à S est une direction de plan de sections circulaires de ce cône C; toutes ces propriétés s'aperçoivent aisément au moyen d'éléments imaginaires, en particulier des génératrices de S.

(²) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. 142, 1936, p. 66-68.

générale, le résultat relatif à un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$, convexe ou non, circonscrit à un cercle. Nous avons dessiné (*fig.* 3 et *fig.* 3_1) les deux cas

Fig. 3.

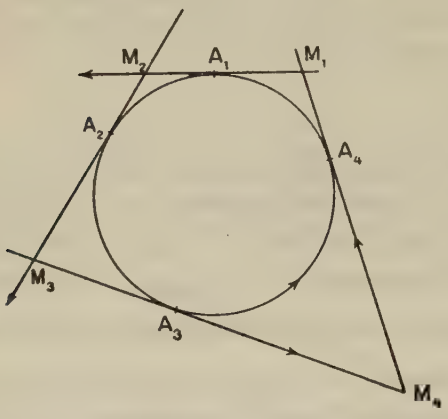
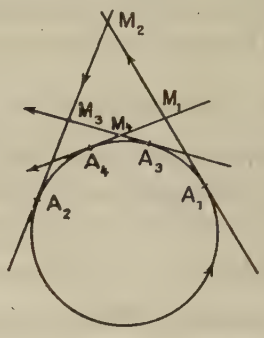


Fig. 3_1.



relatifs à un quadrilatère convexe, le cercle tangent aux 4 côtés étant intérieur ou extérieur, puis (*fig.* 3_2 et *fig.* 3_3) le quadrilatère biconcave et le quadri-

Fig. 3_2.

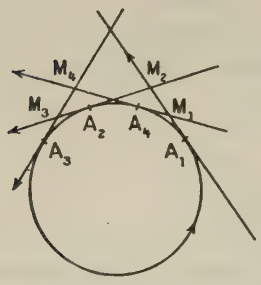
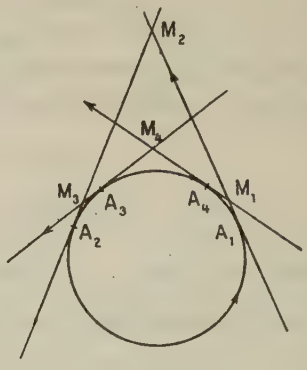


Fig. 3_3.



latère en fer de lance; nous avons orienté le cercle et les flèches; dans les 4 figures, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ sont mesurés par des nombres positifs; dans la première figure, $\overline{M_3M_4}$, $\overline{M_4M_1}$ sont mesurés par des nombres positifs, dans les trois dernières par des nombres négatifs. On a, avec certains nombres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4,

$$\overline{A_1M_1}=-\lambda_1R,\quad \overline{A_2M_2}=-\lambda_2R,\quad \overline{A_3M_3}=-\lambda_3R,\quad \overline{A_4M_4}=-\lambda_4R,$$
$$\overline{A_1M_2}=\lambda_2R,\quad \overline{A_2M_3}=\lambda_3R,\quad \overline{A_3M_4}=\lambda_4R,\quad \overline{A_4M_1}=\lambda_1R,$$
$$\overline{M_1M_2}=(\lambda_1+\lambda_2)R,\quad \overline{M_2M_3}=(\lambda_2+\lambda_3)R,\quad \overline{M_3M_4}=(\lambda_3+\lambda_4)R,\quad \overline{M_4M_5}=(\lambda_4+\lambda_4)R.$$

On a, dans tous les cas,

$$\overline{M_1M_2}+\overline{M_3M_4}=\overline{M_2M_3}+\overline{M_4M_1}=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)R.$$

Démontrons la réciproque : on a 4 flèches $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$; M_1 est au point de croisement de $\vec{f}_4, \vec{f}_1$, M_2 de $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, M_3 de $\vec{f}_2, \vec{f}_3$, M_4 de $\vec{f}_3, \vec{f}_4$ et nous supposons

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_4} = \overline{M_2M_3} - \overline{M_4M_1}, \tag{1}$$

chaque segment étant évalué, avec son signe, sur la flèche qui le porte; *dans ces conditions il existe un cycle tangent aux 4 flèches.*

En revenant aux valeurs absolues, une relation telle que (1) est remplacée par

$$M_1M_2 \pm M_2M_3 \pm M_3M_4 \pm M_4M_1 = 0.$$

On ne peut avoir 4 signes +; on ne peut avoir ni 3 signes +, ni 3 signes —, parce qu'un segment rectiligne est plus court que toute ligne brisée réunissant ses extrémités. On doit donc étudier les hypothèses

$$M_1M_2 + M_2M_3 - M_3M_4 - M_4M_1 = 0, \tag{a}$$

$$M_1M_2 - M_2M_3 + M_3M_4 - M_4M_1 = 0, \tag{b}$$

$$M_1M_2 - M_2M_3 - M_3M_4 + M_4M_1 = 0. \tag{c}$$

On peut, sans changer la figure, avec une permutation circulaire sur les lettres M_1, M_2, M_3, M_4, échanger les relations (a) et (c); il suffit donc d'étudier (b) et (c). La relation (c) $M_1M_2 + M_4M_1 = M_3M_2 + M_3M_4$ signifie que M_1, M_3 sont sur une même ellipse de foyers M_2, M_4 (écartons, du moins momentanément, le cas où $M_1M_2M_3M_4$ serait un parallélogramme); les tangentes en M_1, M_3 (*fig.* 3_1 ou 3_2) concourent en un point O à distance finie; d'après Poncelet, OM_2 bissecte l'angle $\widehat{M_3M_2M_1}$ et OM_4 l'angle $\widehat{M_3M_4M_1}$; O est donc commun à 4 bissectrices d'angles formés en M_1, M_2, M_3, M_4 par les côtés du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$; *il existe un cercle de centre* O *tangent aux côtés du quadrilatère.*

La relation (b) $M_1M_2 - M_4M_1 = M_3M_2 - M_3M_4$ exprime que M_1, M_3 sont sur une même branche d'hyperbole de foyers M_2, M_4; le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ ne peut cette fois être un parallélogramme et le *même raisonnement prouve qu'il existe encore un cercle de centre* O *tangent aux côtés du quadrilatère.*

Nous orientons le cercle trouvé dans le sens que lui imprime la flèche $\vec{f}_1$ support du segment M_1M_2 : ou bien le *cycle* obtenu est tangent aux flèches $\vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ et notre proposition est vérifiée ou bien le cycle de centre O donne des flèches $\vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ dont un certain nombre sont opposées à la flèche $\vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ de même indice; la relation

$$M_1M_2 + \varepsilon_1 M_2M_3 + \varepsilon_2 M_3M_4 + \varepsilon_3 M_4M_1 = 0 \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1,\ \varepsilon_2 = \pm 1,\ \varepsilon_3 = \pm 1) \tag{2}$$

qui nous a servi est accompagnée, en étudiant O et le cycle obtenu, par

$$M_1M_2 + \varepsilon'_1 M_2M_3 + \varepsilon'_2 M_3M_4 + \varepsilon'_3 M_4M_1 = 0. \tag{3}$$

où les ε'_i peuvent être égaux à l'ε_i de même indice ou opposés, car la valeur d'un segment $\overline{M_2M_3}$ change de signe si la flèche support change de sens. On ne peut avoir $\varepsilon'_1 = -\varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = -\varepsilon_2$, $\varepsilon'_3 = -\varepsilon_3$, car on aurait par addition $M_1M_2 = 0$, et nous avons supposé M_1, M_2 non confondus; le cas où un seul ε_i a changé de signe donne la conclusion analogue; si deux ε'_i sont opposés à l'ε_i correspondant, nous ajouterons et retrancherons les égalités (2) et (3), et cela nous conduit à 2 égalités exprimant chacune l'égalité de deux longueurs : si donc ce sont 2 couples de côtés contigus qui donnent chacun des côtés égaux, le quadrilatère a un axe de symétrie, et il y a 2 cercles tangents aux 4 côtés : l'un deux, orienté comme il a été dit, donne la relation segmentaire primitive et l'autre fournit la nouvelle relation, de sorte que notre réciproque est vérifiée; si ce sont 2 couples de côtés opposés qui donnent chacun des côtés égaux, il y a 2 cas possibles : dans le premier, le quadrilatère est biconcave, avec un axe de symétrie et notre réciproque est encore vérifiée, comme à l'instant, pour la même raison; le second cas donne un parallélogramme : les flèches supports de M_1M_2, M_3M_4 sont parallèles et de même sens, de façon que $\overline{M_1M_2} + \overline{M_3M_4}$ soit nul; de même les flèches $\vec{f}_2$, $\vec{f}_4$ sont parallèles et de même sens : ce cas doit être regardé comme cas limite de la figure 3, quand, sur l'ellipse de foyers M_2, M_4, le point M_3 varie et tend vers le point diamétralement opposé à M_1; le cercle, exinscrit au quadrilatère convexe $M_1M_2M_3M_4$ s'éloigne tout entier à l'infini : analytiquement parlant, il tend vers la droite de l'infini, comptée 2 fois : nous considérons donc la réciproque comme vérifiée encore dans ce cas.

Cela posé, démontrons un lemme de E. Müller (1) : *Soient 4 flèches* $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, $\vec{f}_4$ *tangentes à un même cycle* $\vec{C}$; *on construit quatre cycles* $c_{12}, c_{23}, c_{34}, c_{41}$, *touchant respectivement* $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$, $(\vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $(\vec{f}_3, \vec{f}_4)$, $(\vec{f}_4, \vec{f}_1)$; *on mène ensuite les flèches* $\vec{f}'_1$ *touchant* (c_{41}, c_{12}), $\vec{f}'_2$ *touchant* (c_{12}, c_{23}), $\vec{f}'_3$ *touchant* (c_{23}, c_{34}), $\vec{f}'_4$ *touchant* (c_{34}, c_{41}), (*et distinctes des flèches déjà connues telles que* $\vec{f}_1$ *qui touche* c_{41}, c_{12}). *Ces quatre nouvelles flèches sont tangentes à un même cycle.*

La figure 4 correspond au cas particulier très simple où le cycle initial $\vec{C}$ est tangent intérieurement aux côtés du quadrilatère convexe formé par $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, $\vec{f}_4$ et nous avons supposé les cycles c_{12}, c_{23}, c_{34}, c_{41} inscrits dans les angles opposés aux angles M_2, M_3, M_4, M_1 du quadrilatère initial. Nous avons marqué les points de contact B_{12}, A_{12} sur $\vec{f}_1$ et de même sur les autres flèches; on a, en valeur absolue,

$$A_{12}B_{12} = A'_{12}B'_{12},$$

(1) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. 14, 1905, p. 574-578.

d'autre part nous voulons démontrer l'égalité

(E′) $$M'_1 M'_2 + M'_3 M'_4 = M'_2 M'_3 + M'_4 M'_1.$$

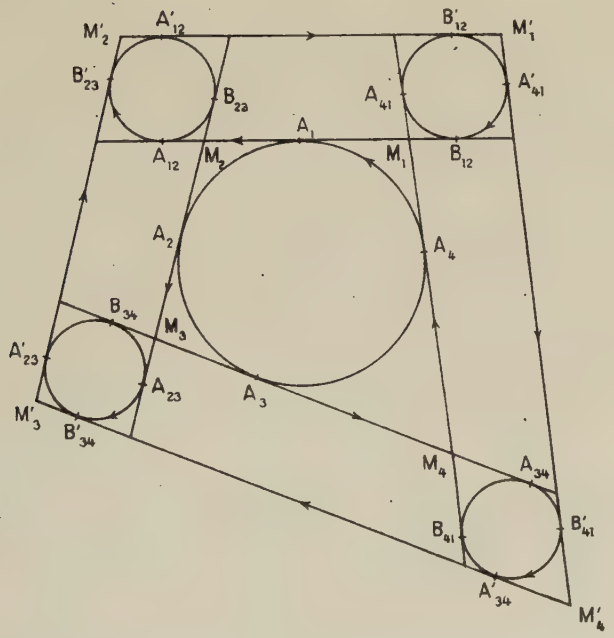
On peut supprimer au premier membre les segments

$$M'_1 B'_{12},\ A'_{12} M'_2,\ M'_3 B'_{34},\ A'_{41} M'_4$$

à condition d'enlever au second membre les segments respectivement égaux

$$M'_1 A'_{41},\ M'_2 B'_{23},\ M'_3 A'_{23},\ M'_4 B'_{41}.$$

Fig. 1.



L'égalité présumée se réduit à

$$A'_{12} B'_{12} + A'_{34} B'_{34} = B'_{23} A'_{23} + B'_{41} A'_{41}$$

ou

$$A_{12} B_{12} + B_{34} A_{34} = B_{23} A_{23} + B_{41} A_{41}.$$

Si j'enlève au premier membre les segments

$$B_{12} M_1,\ M_2 A_{12},\ M_3 B_{34},\ M_4 A_{34}$$

et au second membre les segments respectivement égaux

$$M_1 A_{41},\ M_2 B_{23},\ M_3 A_{23},\ M_4 B_{41},$$

il reste l'égalité exacte

(E) $$M_1 M_2 + M_3 M_4 = M_2 M_3 + M_4 M_1,$$

de sorte que (E'), elle aussi, est exacte et que les flèches $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$, $\vec{f_4}$ sont tangentes à un même cycle.

La proposition est donc vraie, *quelle que soit la figure*, car nous aurions pu traiter la question par le calcul en n'introduisant que des calculs *algébriques et rationnels* : les variables seraient les rayons, positifs ou négatifs, de $\vec{C}$, c_{12}, c_{23}, c_{34}, c_{41} et les quantités tang $\frac{\alpha_1}{2}$, $\frac{\alpha_2}{2}$, $\frac{\alpha_3}{2}$, $\frac{\alpha_4}{2}$ qui déterminent les points de contact A_1, A_2, A_3, A_4 des flèches $\vec{f_1}$, avec $\vec{C}$ [O étant centre de $\vec{C}$, $(\widehat{Ox}, \widehat{OA_1})$ est l'angle orienté α_1 déterminé à 2π près]; donc le théorème, vérifié géométriquement, dans un cas de figure particulier, est vrai d'une façon générale. Le raisonnement, fait plus haut par limite, prouve que la proposition serait encore vraie si $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

Démontrons maintenant le théorème de Kubota : les flèches $\vec{O}$, a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4 touchent un même cycle, a_1; or a_1a_2, a_1a_3 touchent $a_1a_2a_3$; a_1a_3, a_1a_4 touchent $a_1a_3a_4$; a_1a_4, $\vec{O}$ touchent a_1; $\vec{O}$, a_1a_2 touchent a_2; nous appliquons le lemme: soit $\vec{\varphi}$ la flèche, autre que a_1a_3 tangente à $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_4$; les cycles $a_1a_2a_3$, a_1 ont une flèche commune autre que a_1a_3, qui est a_2a_3; a_3, a_2 ont une flèche commune autre que $\vec{O}$, qui est a_2a_3; a_2, $a_1a_2a_3$ ont une flèche commune autre que a_1a_2, qui est a_2a_3: donc $\vec{\varphi}$, a_3a_4, a_2a_4, a_2a_3 sont tangentes à un même cycle que nous avons appelé $a_2a_3a_4$; donc $\vec{\varphi}$ est tangente à, $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_4$, $a_2a_3a_4$; pour la même raison, elle est tangente à $a_1a_2a_4$ et notre proposition est démontrée; les 4 cycles $\frac{P_4}{a_i}$ ont une flèche tangente commune, que nous appellerons $a_1a_2a_3a_4$ et le raisonnement récurrent peut s'appliquer.

11. *Énoncés récurrents alternés divers.* — Nous empruntons ces énoncés à M. Labrousse (*loc. cit.*)

1° *A 3 points donnés* A_1, A_2, A_3 *on fait correspondre la conique* S_3 *de foyer* O *inscrite dans le triangle* $A_1A_2A_3$; *étant donnés* 4 *points, les* 4 *coniques* S_3 *correspondant à leurs combinaisons* 3 *à* 3 *ont une tangente commune* T_4, *que l'on fait correspondre aux* 4 *points. Étant donnés* 5 *points, les* 5 *droites* T_4 *correspondant à leurs combinaisons* 4 *à* 4 *sont tangentes à une conique* S_5 *de foyer* O, *que l'on fait correspondre aux* 5 *points. Étant donnés* 6 *points, les* 6 *coniques* S_5 *correspondant à leurs combinaisons* 5 *à* 5 *ont une tangente commune* T_6 *et ainsi de suite.*

Ici encore, comme pour le théorème de Tzitzeica-Oüe, nous allons essayer d'introduire la symétrie dès le début; les éléments pairs sont des droites T_{2i}.

les éléments impairs des coniques S_{2i-1}; si donc il existe un théorème récurrent du type étudié dans ce travail, nous devons essayer de vérifier le théorème suivant :

On considère une droite fixe O *et des coniques de foyer commun* F, *tangentes à* O, *à savoir* $a_1, a_2, \ldots a_n$. *Les deux coniques* a_i, a_j *ont, en dehors de* O *et des droites isotropes issues de* F, *une seule tangente commune nouvelle* $a_i a_j$; *les* 3 *droites* $a_i a_j$, $a_i a_k$, $a_j a_k$ *déterminent une seule conique* $a_i a_j a_k$, *de foyer* F, *qui leur est tangente; 4 coniques* a_1, a_2, a_3, a_4 *définissent 4 coniques nouvelles de symbole* $\frac{P_4}{a_i}$ *ou* $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$ *et ces 4 coniques ont une tangente commune* $a_1 a_2 a_3 a_4$ *et ainsi de suite.*

Pour démontrer la proposition, il suffit de songer au théorème de Miquel et Clifford : soient un point fixe ω et des cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ issus de ω; *on choisit un point* F *et l'on construit les courbes antipodaires par rapport au point* F *des points ou des cercles que le théorème de Miquel et Clifford fait intervenir successivement;* à un cercle correspond la conique, de foyer F, admettant le cercle comme cercle principal; à un point μ correspond la perpendiculaire à Fμ issue de μ. Si le point F est distinct de ω nous déduisons du théorème de Miquel et Clifford le théorème que nous venons d'énoncer; mais si F est pris en ω, chaque cercle issu de ω est remplacé par un point, diamétralement opposé à ω sur ce cercle et nous avons l'énoncé de M. Labrousse. La méthode suivie ici a donc permis de démontrer le théorème proposé et, en même temps, un autre plus général.

2° Voici un énoncé dû à M. Pacquement, cité par M. Labrousse :

4 droites du plan, on fait correspondre le centre de l'hypocycloïde à 3 *rebroussements qui leur est tangente; étant données* 5 *droites, à leurs combinaisons 4 à 4 correspondent* 5 *points; aux cinq droites, correspond, par un procédé expliqué plus loin, un limaçon de Pascal qui passe en ces* 5 *points. Étant données* 6 *droites, à leurs combinaisons* 5 *à* 5 *correspondent* 6 *limaçons de Pascal passant par un même point, que l'on fait correspondre aux* 6 *droites et ainsi de suite.*

Cet énoncé comporte deux espèces d'éléments : des points et des limaçons de Pascal. En appliquant au théorème de Kubota *la transformation par podaires relativement au point* F, pris arbitrairement dans le plan, la flèche O est remplacée par la projection ω de F sur $\vec{O}$; chaque cycle a_i est remplacé par un limaçon α_i de Pascal, de point double F, passant en ω; deux cycles a_1, a_2 fournissent ainsi deux limaçons α_1, α_2 dont les points communs, autres que F et les points cycliques, sont au nombre de 4 : mais deux de ces points correspondent aux cycles a_1, a_2 et deux aux cycles a_1 et $(-a_2)$; nous écartons ces

deux points et il reste, en dehors de ω, un unique point $\alpha_1\alpha_2$, qui correspond à la flèche a_1a_2 : $\alpha_1\alpha_2$ est la projection de F sur a_1a_1; nous définissons ainsi, à partir de ω élément pair initial et de limaçons α_1, α_2, ..., α_n issus de ω, dont les rayons vecteurs issus de F sont orientés, une configuration récurente du type étudié dans ce Mémoire (l'orientation des rayons vecteurs, quand F est pris pour origine revient à distinguer deux limaçons $\rho = a\cos\omega + b$, $\rho = -a\cos\omega - b$ qui sont portés par la même courbe).

Quant au théorème de M. Pacquement, nous voyons aisément qu'il ne peut coïncider avec celui qui se déduit du théorème de Kubota; comptons le nombre de paramètres quand nous prenons 6 limaçons de Pascal initiaux : le théorème de Kubota fait choisir la flèche $\vec{O}$ et 6 cycles; nous prenons ensuite F arbitrairement, nous avons 16 paramètres. Pour le théorème de M. Pacquement nous avons 6 limaçons déterminés par la connaissance de 6 droites, soit 12 paramètres seulement au lieu de 16; d'autre part le point double des limaçons introduits dans ce dernier théorème est variable (si l'on passe de 5 droites et du limaçon correspondant à la figure déduite par simple déplacement, le point double subit ce même déplacement) : donc, bien que récurrent alterné, le théorème de M. Pacquement ne peut être étudié par notre méthode, en raison de l'impossibilité de rétablir la symétrie dès le début.

12. *Théorèmes récurrents non alternés* (cités d'après M. Labrousse)

1° *Théorème donné par Clifford :* à trois droites du plan on fait correspondre le cercle C_3 circonscrit au triangle qu'elles déterminent; pour 4 droites, les 4 cercles C_3 correspondant à leurs combinaisons 3 à 3 ont leurs centres situés sur un même cercle C_4; 5 droites, prises 4 à 4, donnent 5 cercles C_4 dont les centres sont sur un même cercle C_5 et ainsi de suite.

2° Soit un cercle Γ, O un point fixe de Γ; à 2 points A_1, A_2 de Γ on fait correspondre la droite A_1A_2; à trois points A_1, A_2, A_3 de Γ on fait correspondre la droite de Simson Δ_3 relative à O et au triangle $A_1A_2A_3$; 4 points de Γ donnent, pris 3 à 3, 4 droites Δ_3 et les projections de O sur ces 4 droites sont sur une même droite Δ_4 et ainsi de suite.

3° Considérons 6 droites tangentes à une hypocycloïde à 3 rebroussements H_3; les 6 coniques tangentes aux combinaisons de ces 6 droites 5 à 5 ont leurs centres situés sur un même cercle C_6; étant données 7 droites tangentes à H_3, les centres des 7 cercles C_6 correspondant à leurs combinaisons 6 à 6 sont sur un même cercle C_7 et ainsi de suite indéfiniment : ce théorème est dû à M. Labrousse.

4° On donne dans le plan un point fixe O; à 3 points A_1, A_2, A_3 on fait correspondre la conique Σ_3, de foyer O, tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$; aux combinaisons 3 à 3 de 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 correspondent 4 coniques Σ_3,

dont les directrices, relatives à O, sont tangentes à une même conique Σ_4 de foyer O. Aux combinaisons 4 à 4 de 5 points correspondent 5 coniques Σ_4, dont les directrices, relatives à O, sont tangentes à une même conique Σ_5 de foyer O et ainsi de suite.

5° On considère des points d'un cercle Γ donné; à trois points A_1, A_2, A_3, on fait correspondre l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$; étant donnés 4 points de Γ, les 4 droites joignant chacun d'eux au point associé aux 3 autres sont concourantes en un point ω_4 que l'on fait correspondre aux 4 points. Soit, en général, ω_n le point correspondant ainsi à n points; étant donnés $n+1$ points, les $(n+1)$ droites joignant chacun d'eux au point ω_n associé aux n autres concourent en un même point ω_{n+1}.

En outre les $(n+1)$ points ω_n sont sur un même cercle Γ_{n-1} que l'on peut associer aux $(n+1)$ points et les centres des $(n+1)$ cercles Γ_n associés à toutes les combinaisons n à n sont sur un même cercle.

13. *Théorème de M. Pacquement; théorèmes réguliers ou irréguliers.* — Notre étude a mis en évidence des théorèmes récurrents alternés, *réguliers* ou *irréguliers*. Pour ces derniers, à partir de certains êtres géométriques A_1, A_2, ..., A_n, ..., nous avons défini des éléments de parités opposées, représentés par des symboles à p, $p+1$, ... $p+q$... lettres, sans pouvoir définir les éléments à 0, 1, 2, ... $p-1$ lettres; le raisonnement récurrent ne s'applique plus à ces théorèmes irréguliers, de sorte que la diversité des démonstrations rend leur étude plus laborieuse. Mais, comme la classe des théorèmes réguliers est comprise dans celle des théorèmes irréguliers, il peut arriver que deux théorèmes, l'un régulier, l'autre irrégulier puissent se démontrer de façons presque identiques. Nous allons le prouver en donnant une démonstration analytique du théorème de Miquel et Clifford, reproduite par Lebesgue (*loc. cit.*), qui peut s'appliquer presque textuellement au théorème de M. Pacquement; elle s'applique encore à de nombreux théorèmes que nous apprendrons à former.

Soit, dans le plan, une courbe algébrique C_c, *de classe* c, *pour laquelle la droite de l'infini est une tangente multiple d'ordre* $(c-1)$, *sans que les points cycliques* I, J *soient points de contact;* de I et J on peut mener à C_c une seule tangente autre que la droite de l'infini et les deux tangentes ainsi obtenues se coupent en un point F, unique *foyer* de C_c. L'équation tangentielle de C_c est

$$wf_{c-1}(u, v) + f_c(u, v) = 0,$$

f_{c-1}, f_c étant des polynomes homogènes en u, v de degré $c-1$ ou c; $2c$ droites a_1, a_2, ... a_{2c} données *a priori* déterminent une seule courbe C_c qui leur est tangente, un seul foyer que nous appelons $a_1a_2 \ldots a_{2c}$; $(2c-1)$ droites a_1, a_2, ..., a_{2c-1} déterminent un faisceau linéaire tangentiel de

courbes C_c, dont le lieu des foyers est un cercle $a_1 a_2 \dots a_{2c-1}$, car les tangentes issues de I ou J à l'une de ces courbes se correspondent homographiquement; le point $a_1 a_2 \dots a_{2c-1} a_{2c}$ est sur le cercle $a_1 a_2 \dots a_{2c-1}$. D'autre part, soient C_{c-1} la courbe analogue, de classe $c-1$, définie par les tangentes $a_1, a_2, \dots, a_{2c-2}$, et F son foyer; en adjoignant à C_{c-1} le point à l'infini de a_{2c-1}, on obtient une C_c décomposée, de même foyer que C_{c-1}, incluse dans le faisceau tangentiel défini par $a_1, a_2, \dots, a_{2c-1}$, de sorte que $a_1 a_2 \dots a_{2c-2}$ est aussi un point du cercle $a_1 a_2 \dots a_{2c-1}$. Nous avons alors le théorème de Miquel et Clifford, car $a_1 a_2$ est le point de rencontre de a_1, a_2; $a_1 a_2 a_3$ est le cercle contenant $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$; $a_1 a_2 a_3 a_4$ le foyer de la parabole tangente à a_1, a_2, a_3, a_4, et ainsi de suite. Du point de vue *métrique ou projectif*, le théorème est irrégulier, car l'élément 1 n'est pas défini; mais, du point de vue *anallagmatique*, les droites $a_1, a_2, \dots$ sont des cercles ayant en commun un point fixe (à distance finie ou infinie). C'est cette circonstance heureuse qui explique que le théorème de Miquel et Clifford peut servir de théorème type aussi bien pour la classe des théorèmes réguliers que pour celle des théorèmes irréguliers.

Passons au théorème de M. Pacquement : *soit une courbe* C_c *de classe* c, *tangente* $(c-1)$ *fois à la droite de l'infini, les points cycliques* I, J *étant des points simples de contact.* Cette définition suppose $c-1 \geqq 2$ ou $c \geqq 3$: c'est l'une des causes de l'irrégularité. Il existe ∞^1 coniques ayant avec C_c quatre points communs réunis en I, ou, ce qui est équivalent, quatre tangentes communes confondues avec la tangente en I à C_c; J a même polaire (j) par rapport à ces coniques; I donne la droite (i) analogue; le point commun à (i), (j) sera dit *paracentre* de C_c et la courbe C_c étudiée, *parabole circulaire de Darboux* (en abrégé, PCD). L'équation tangentielle d'une PCD est

$$w(u^2+v^2) f_{c-3}(u, v) + f_c(u, v) = 0,$$

où f_{c-3}, f_c sont des polynomes homogènes en u, v de degré $c-3$ et c; pour $c=3$, on obtient une *hypocycloïde à trois rebroussements*, H_3; $2(c-1)$ tangentes $A_1, \dots A_{2(c-1)}$ données *a priori* déterminent une seule C_c, de paracentre $a_1 a_2 \dots a_{2(c-1)}$; $2c-3$ tangentes $A_1, \dots A_{2c-3}$ déterminent un faisceau linéaire tangentiel de PCD de classe c, donc un lieu unicursal $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$ pour le paracentre, lieu contenant $a_1 a_2 \dots a_{2c-3} a_{2c-2}$; la courbe C_{c-1}, de classe $c-1$, définie par $A_1, A_2, \dots A_{2c-4}$, jointe au point à l'infini de A_{2c-3} donne une C_c décomposée, incluse dans le faisceau tangentiel qui précède, le paracentre étant le même pour C_{c-1} et la courbe décomposée C_c; donc le point $a_1 a_2 \dots a_{2c-4}$ est sur le lieu $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$. *Nous avons ainsi, en rééditant les termes de la démonstration du théorème de Miquel et Clifford, établi le théorème de M. Pacquement, sans avoir eu besoin de préciser la nature du lieu unicursal* $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$: nous allons montrer maintenant que le lieu $a_1 a_2 a_3$ des paracentres des H_3 tangentes à trois droites A_1, A_2, A_3 est une *droite*, et que

le lieu $a_1 a_2 \ldots a_{2c-3}$, pour un nombre de droites impair, supérieur ou égal à 5, est un *limaçon de Pascal*.

Pour trouver le paracentre d'une PCD, opérons en coordonnées isotropes, ou, ce qui est équivalent, effectuons une transformation homographique changeant I, J en les points à l'infini ξ, η des axes de coordonnées; l'équation tangentielle d'une PCD est alors $uvwf_{c-3}(u, v) + f_c(u, v) = 0$ avec

$$f_c(u, v) \equiv Au^c + Bu^{c-1}v + \ldots + Huv^{c-1} + Lv^c,$$
$$f_{c-3}(u, v) \equiv au^{c-3} + bu^{c-4}v + \ldots + huv^{c-4} + lv^{c-3}.$$

Soit S une conique coupant la PCD en quatre points confondus avec ξ, ou encore ayant avec cette PCD quatre tangentes communes confondues avec la droite de l'infini, le point de contact étant ξ; pour cela, passons aux courbes réciproques, obtenues en remplaçant u, v, w par x, y, 1; la réciproque de notre PCD est $xyf_{c-3}(x, y) + f_c(x, y) = 0$; la réciproque S′ de S touche Oy en O et a une équation $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - x = 0$; le faisceau de droites, de sommet O, passant aux points communs à ces deux transformées, a pour équation $y(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) f_{c-3}(x, y) + f_c(x, y) = 0$ et contient x^2 en facteur, d'où $\gamma = -\frac{L}{l}$, $2\beta = \frac{hL - Hl}{l^2}$; la conique S a pour équation tangentielle $\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 - uw = 0$, où β, γ ont des valeurs indiquées, α restant arbitraire. La droite $y + m = 0$, qui joint le paracentre à ξ, est la polaire de η par rapport à S; le pôle de $y + m = 0$ a pour coordonnées homogènes $(2\beta - m, 2\gamma, 0)$ et doit être $\eta(0, 1, 0)$, donc $m = 2\beta$. Le paracentre est donc sur la droite $y = \frac{Hl}{l^2} - \frac{hL}{l^2}$ et, par symétrie, sur la droite $x = \frac{Ba - bA}{a^2}$; *c'est parce que le résultat de ce calcul est, au fond, indépendant de la valeur précise de c que le théorème récurrent peut être énoncé.*

Supposons que nous ayons *un faisceau tangentiel de* PCD *tel que les points de contact, autres que* I, J, *avec la droite de l'infini restent fixes :* les coefficients de f_{c-3} sont fixes, et A, B... sont des polynomes entiers du premier degré par rapport à un paramètre variable λ : *le paracentre décrit une droite; c'est ce qui arrive pour les* H_3 *tangentes aux côtés d'un triangle fixe.* L'équation tangentielle d'une H_3, en coordonnées isotropes, est

$$uvw + Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3 = 0$$

et les coordonnées du paracentre sont (B, C); on voit, et cette remarque nous servira plus loin, que l'on peut définir un faisceau tangentiel de courbes H_3 soit en donnant trois tangentes fixes A_1, A_2, A_3 quelconques, soit deux tangentes fixes A_1, A_2 et une droite Δ quelconque, lieu du paracentre. Le paracentre d'une H_3 est évidemment son centre ternaire de rotation, point commun aux trois tangentes de rebroussement, car, par rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de ce centre ternaire, la courbe, I, J, donc aussi le paracentre restent invariants.

Supposons maintenant que, pour $c \geq 4$, nous ayons *un faisceau tangentiel* de PCD, *dont les points de contact avec la droite de l'infini, autres que* I, J, *soient variables;* A, B, L, H, a, b, l, h sont polynomes entiers du premier degré par rapport au paramètre λ; le lieu du paracentre a pour équations paramétriques, en coordonnées isotropes (avec un léger changement de notations),

$$x = \frac{(a+\lambda a')(B+\lambda B') - (b+\lambda b')(A+\lambda A')}{(a+\lambda a')^2} \qquad y = \frac{(l+\lambda l')(H+\lambda H') - (h+\lambda h')(L+\lambda L')}{(l+\lambda l')^2}.$$

Ce lieu est unicursal, de degré 4, admet ξ, η pour points de rebroussement. Autrement dit, revenant aux coordonnées cartésiennes, *le lieu des paracentres des* PCD *tangentes à* $2c-3$ *droites fixes, pour* $c \geq 4$, *est un limaçon de Pascal.* On peut, en changeant les courbes bases du faisceau, supposer $a = 1$, $a' = 0$, $l = 0$, $l' = 1$; les coordonnées isotropes paramétriques sont alors

$$x = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 \qquad y = \frac{\alpha' + \beta'\lambda + \gamma'\lambda^2}{\lambda^2}.$$

Dans ces formules α, β, γ, α', β', γ' peuvent prendre des valeurs arbitraires; en changeant λ en $m\lambda$, où m est arbitraire, on peut égaler à 1 l'un des coefficients, de sorte que la courbe dépend de cinq paramètres effectifs et c'est le limaçon général : un limaçon peut en effet se définir par un cercle arbitraire (trois paramètres) et un point F quelconque (deux paramètres) que l'on projette sur les tangentes du cercle; si accidentellement le cercle est de rayon nul, le limaçon dégénère en un cercle compté deux fois : c'est ce qui arriverait, si β et β' étaient nuls (ce cas exceptionnel peut se présenter pour certaines dispositions de $2c-3$ droites); si β et β' ne sont pas nuls tous deux, on peut réduire l'un à l'unité. Si F est au centre du cercle, le limaçon se réduit à ce cercle; on a alors $\gamma = \alpha' = 0$.

Il est bon de signaler une autre propriété : à cinq droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nous avons attaché le limaçon, unique, lieu des paracentres des PCD de classe 4 tangentes à ces droites; *nous devons nous garder de dire : aux combinaisons* 4 *à* 4 *de cinq droites correspondent* $5H_3$, *donc* 5 *centres ternaires déterminant le limaçon attaché aux* 5 *droites*, car 5 points déterminent, non pas un seul limaçon, mais des limaçons en nombre fini, au moins égal à 2, (deux limaçons arbitraires ont huit points communs à distance finie); *nous devons commencer par construire le limaçon, puis constater que les* 5 *points sont sur le limaçon*, sinon il y aurait ambiguïté et nous ne saurions plus continuer la chaîne; même avec sept droites, nous ne pouvons affirmer sans preuve que les sept points obtenus déterminent (surabondamment) un seul limaçon;

(1) Pour déterminer les limaçons passant par cinq points M_i donnés, on peut prendre pour élément inconnu le point double F à distance finie, élever en chaque point M_i la perpendiculaire Δ_i à M_iF; exprimant que la conique tangente aux Δ_i est un cercle C, on a deux équations algébriques donnant un nombre fini de points F; le limaçon obtenu pour l'un de ces points F est la podaire de

à partir de neuf droites, la difficulté n'existe plus (¹). Dans le théorème de Miquel et Clifford, cette difficulté, ne se présente pas, puisque trois points déterminent un seul cercle, mais elle peut intervenir pour d'autres théorèmes réguliers ou irréguliers.

14. *Quelques théorèmes alternés irréguliers.* — Pour abréger l'écriture, j'écrirai théorème M.C. ou théorème P. pour théorème de Miquel et Clifford ou théorème de M. Pacquement. Ces deux théorèmes relèvent d'un même mode de démonstration analytique qui réussit chaque fois que nous pouvons définir des courbes C_m algébriques, de degré (ou classe) m arbitraire, possédant les propriétés suivantes :

1° L'équation ponctuelle (ou tangentielle) rationnelle entière de C_m dépend linéairement de deux polynomes homogènes en x, y, (ou en u, v), de degré respectif $m-h$, $m-k$, où h, k sont fixes : soient P, Q ces polynomes.

2° On peut attacher à C_m un point F (ou un groupe de q points, q étant un entier fixe) bien déterminé, dont le lieu, si C_m engendre un faisceau linéaire ponctuel (ou tangentiel) a des équations paramétriques de forme indépendante de la valeur m.

3° Si P, Q viennent à contenir un même facteur linéaire en x, y ou u, v, C_m se décompose en une droite (ou un point) et une courbe C_{m-1}, de même définition, pour l'entier $m-1$ au lieu de m; on suppose que le point F relatif à cette courbe C_m décomposée est aussi le point F de la courbe C_{m-1}.

Dans ces conditions, le théorème récurrent alterné peut être énoncé et nous ne rééditons plus le raisonnement employé pour le théorème M.C., puis pour le théorème P.

Donnons un exemple précis : considérons la courbe C_c de classe c, d'équation tangentielle

$$f_c(u,v)+w^p f_{c-p}(u,v)=0,$$

où f_c, f_{c-p} sont homogènes, de degré c et $c-p$ respectivement (M. Labrousse m'a suggéré cet exemple pour $p=2$); c est un entier quelconque, au moins

---

ce cercle relativement à F. Dans cette question s'introduisent dix paramètres (deux pour chaque droite Δ_i); on peut les engager successivement de bien des façons : par exemple, si l'on donne le limaçon (cinq paramètres), puis cinq points M_i sur cette courbe, on ne peut affirmer *a priori* que ces cinq points puissent être choisis arbitrairement; s'ils peuvent être choisis sans restriction, les cinq paramètres nouveaux, ajoutés aux précédents, donnent un nombre fini de systèmes correspondants de cinq droites; sinon, il y aura h conditions de compatibilité, $5-h$ points seront pris arbitrairement sur le limaçon, les h autres en résulteront et on aura, pour un tel système, ∞^h systèmes de cinq droites, de façon que le total $5+(5-h)+h$ reproduise dix. Si l'on veut commencer par cinq points, il faudra peut-être h conditions de compatibilité, où h est le même que précédemment; ensuite, on a un nombre fini de limaçons et, pour chacun d'eux, la détermination des cinq droites s'achève comme précédemment (h est probablement nul).

égal à p; de chaque point cyclique I, J on peut mener p tangentes à C_c et nous définissons ainsi un groupe F de p^2 *foyers*; $2c-p+1$ tangentes $A_1, A_2, \ldots, A_{2c-p+1}$ déterminent une seule C_c, et un seul groupe F (qu'il sera commode d'appeler *multipoint focal d'ordre p*) désigné par $a_1 a_2 \ldots a_{2c-p+1}$; $A_1, A_2, \ldots, A_{2c-p}$ déterminent un faisceau linéaire tangentiel de C_c, donc un lieu $a_1 a_2 \ldots a_{2c-p}$ de multipoints focaux, lieu contenant $a_1 a_2 \ldots a_{2c-p} a_{2c-p+1}$; le multipoint focal de la courbe C_{c-1} définie par $A_1, A_2, \ldots, A_{2c-p-1}$ est aussi focal pour la courbe C_c décomposée en cette C_{c-1} et le point à l'infini de A_{2c-p}, de sorte que le lieu $a_1 a_2 \ldots a_{2c-p}$ contient les multipoints dont les symboles contiennent une lettre nouvelle ou une lettre de moins. Restent à trouver les équations paramétriques du lieu $a_1 a_2 \ldots a_{2c-p}$. Nous écrivons

$$f_c(u, v) \equiv A u^c + A_1 u^{c-1} v + \ldots + A_c v^c, \quad f_{c-p} \equiv a u^{c-p} + a_1 u^{c-p-1} v + \ldots + a_{c-p} v^{c-p}.$$

La droite $x + iy + h = 0$ est tangente si l'on a

$$A + A_1 i - A_2 - A_3 i + A_4 + \ldots + h^p (a + a_1 i - a_2 - a_3 i + a_4 + \ldots) = 0.$$

Les foyers sont donc définis par deux équations de la forme

$$x + iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}}, \qquad x - iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}}.$$

Les déterminations des deux radicaux peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre, mais on a les p foyers réels associant les déterminations conjuguées : *ils sont disposés aux sommets d'un polygone régulier de p côtés dont l'origine est le centre.* Si l'on suppose que la courbe C_c décrit un faisceau tangentiel, nous avons une représentation paramétrique, où λ est le paramètre variable et $\alpha, \beta, \ldots, \delta'$, des constantes,

$$(1) \qquad x + iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha + \beta i + \lambda(\alpha' + \beta' i)}{\gamma + \delta i + \lambda(\gamma' + \delta' i}} \qquad x - iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha - \beta i + \lambda(\alpha' - \beta' i)}{\gamma - \delta i + \lambda(\gamma' - \delta' i)}}.$$

La forme de ce résultat est indépendante du degré c, de sorte que, dans notre énoncé récurrent, tous les lieux $a_1 a_2 \ldots a_{2c-p}$ sont de même nature, sauf quand c atteint sa valeur minimum p, le polynome f_{c-p} se réduisant à l'unité : dans ce cas, on a

$$(2) \qquad x + iy = \sqrt[p]{\alpha + \beta i + \lambda(\alpha' + \beta' i)} \qquad x - iy = \sqrt[p]{\alpha - \beta i + \lambda(\alpha' - \beta' i)}.$$

Notre théorème récurrent est établi :

p tangentes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *déterminent un lieu* $a_1 a_2 \ldots a_p$; *ensuite* $(p+1)$ *tangentes* $A_1, A_2, \ldots, A_{p+1}$ *un multipoint* $a_1 a_2 \ldots a_p a_{p+1}$ *situé sur le lieu qui précède et sur tous les lieux analogues obtenus en supprimant une tangente;*

$(p+2)$ tangentes déterminent un nouveau lieu contenant les multipoints obtenus en supprimant une tangente, et ainsi de suite.

Si l'on pose

$$X+iY=(x+iy)^p, \quad X-iY=(x-iy)^p \tag{3}$$

le point (X, Y) décrit un cercle dans le cas des formules (1) ou une droite dans le cas des formules (2); si nous posons

$$X=r\cos\theta, \quad Y=r\sin\theta, \quad x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega, \tag{4}$$

les formules

$$r=\rho^p, \quad \theta=p\omega$$

sont plus strictes que les relations (1), car à un point (X, Y) réel, elles ne font correspondre que les valeurs de $x+iy$ et $x-iy$ qui sont *conjuguées*. Si x, y sont une solution des équations (1), la solution générale s'obtient en calculant une racine $p^{\text{ième}}$ de 1, que nous représenterons par ε et déterminant x_1, y_1 par les formules (1)

$$x_1+iy_1=\varepsilon(x+iy), \quad x_1-iy_1=x-iy$$

de sorte que le lieu du point (x, y) se décompose algébriquement en p courbes distinctes, dont une seule est réelle et se reproduit par rotation de $\frac{2\pi}{p}$ autour de O (proposition sans intérêt, pour $p=1$). Dans l'énoncé du théorème nous pouvons nous borner au lieu réel.

Le cercle (ou droite) décrit par le point (X, Y) a une équation de la forme

$$Ar^2+Br\cos(\theta-\theta_0)+C=0,$$

où A, B, C sont trois paramètres homogènes et θ_0 une constante réelle; on a donc, pour l'équation polaire du lieu des foyers réels

$$A\rho^{2p}+B\rho^p\cos p(\omega-\omega_0)+C=0.$$

Le théorème — du moins sous la forme présentée jusqu'ici — est *irrégulier* parce que nous n'avons pu définir, par ce procédé, les éléments à $0, 1, \ldots (p-1)$ lettres. Nous ne parlons pas du cas $p=1$ qui correspond au théorème M. C.

---

(1) Si p est impair, il est plus simple d'écrire $x_1+iy_1=\varepsilon(x-iy)$, $x_1-iy_1=\varepsilon(x-iy)$, de sorte que le lieu se compose de la partie réelle et des homothétiques de cette courbe par rapport à O, avec les rapports $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ (en supposant ε racine primitive); si p est pair, ce procédé ne donne pas tout le lieu imaginaire; on le voit aisément en supposant $p=2$. Cela tient à ce que l'équation tangentielle de la courbe ne change pas si l'on remplace ω par $\pi+\omega$, ce qui revient à faire l'homothétie indiquée

On voit facilement que la courbe

$$A\rho^4+B\rho^2\cos 2\omega+C=0$$

peut être considérée comme la section d'un tore par un plan issu de son centre.

Mais voici quelques résultats inattendus. Imaginons un théorème régulier alterné où les éléments de parité opposée sont, par exemple, des points et des courbes du plan Oxy; effectuons une transformation ponctuelle quelconque : nous avons une nouvelle configuration de points (ou de groupes de points) et de courbes offrant encore la disposition étudiée au début de ce travail : cette configuration C_n comporte 2^{n-1} multipoints, 2^{n-1} courbes; chaque multipoint appartient à n courbes, chaque courbe contient n multipoints. La transformation $Z = z^p$ fait ainsi passer, dans le plan de la variable complexe, de la configuration M. C. (où le point initial est à l'infini) à une configuration qui comprend, parmi ses éléments, tous ceux que nous avons obtenus; l'irrégularité de notre figure tient précisément à ce qu'elle n'épuise pas toute la configuration déduite de M. C. En effet si nous nous bornons à $(p+1)$ tangentes, nous avons : 1° un lieu $a_1 a_2 \ldots a_p$; 2° p multipoints situés sur ce lieu. Revenant au plan M. C. nous avons une droite α_1 et p points situés sur elle, points qui eussent dû correspondre aux intersections de α_1 et de p nouvelles droites $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{p+1}$; la configuration complète M. C. comprend donc 2^p points, 2^p droites.

On peut, dans le même ordre d'idées, considérer la courbe Γ de degré $c+p$ définie par l'équation $(x^2+y^2)^p f_{c-p}(x, y) + f_c(x, y) = 0$; elle admet I, J pour points multiples d'ordre p, chacun d'eux donnant p asymptotes à distance finie; elle possède donc p^2 *foyers singuliers* (intersection de deux asymptotes isotropes); les conditions annoncées sont remplies pour un théorème récurrent, en déterminant soit un faisceau linéaire, soit une courbe, par la donnée de $2c-p$ ou $2c-p+1$ points; or cette courbe n'est autre (sauf symétrie complémentaire par rapport à O, si p est impair) que la podaire par rapport à O de la courbe $f_c(u, v) + w^p f_{c-p} = 0$.

Une asymptote isotrope peut être regardée comme une normale particulière; si F est un foyer de la courbe C, $f_c(u, v) + w^p f_{c-p} = 0$, la droite Fl touche cette courbe en f et le milieu de Of est un point de la normale en I de la podaire Γ, de sorte que chaque foyer singulier de la podaire Γ est le milieu du segment réunissant O au foyer ordinaire de la courbe C. Donc le théorème que l'on obtient coïncide avec le précédent (c'est, pour $p=1$, une nouvelle façon de démontrer le théorème M. C.).

De même, au lieu de la courbe $f_c(u, v) + (u^2+v^2) w f_{c-2} = 0$ employée pour le théorème P., nous pouvons étudier la courbe d'équation

$$f_c(u, v) + (u^2+v^2)^p w^p f_{c-2p}(u, v) = 0,$$

qui admet en I ou J, p branches tangentes à la droite de l'infini; nous traçons en I une conique surosculatrice à l'une des branches, puis la polaire (j) de J relativement à cette conique; nous intervertissons les rôles de I, J et prenons les p^2 points communs à une droite (i) et une droite (j); le *multipoint para-*

centrique conduit à un théorème récurrent déduit du théorème P. comme le théorème établi à l'instant l'a été du théorème M. C.

15. *Régularité éventuelle d'un théorème alterné récurrent.* — Nous avons pu montrer l'identité des énoncés de Tzitzeica et S. Oüe, puis les ramener à un cas particulier du théorème M. C., en essayant de leur restituer le caractère régulier; de même le théorème donné au début du paragraphe 11 a pu être présenté comme dégénérescence d'un théorème régulier.

Supposons donc que certains êtres géométriques A_1, A_2, ..., A_{p-1}, A_p, ..., A_n ... nous conduisent à des éléments récurrents alternés à p, $p+1$, ... lettres, satisfaisant aux conditions que nous avons énoncées pour les éléments de parité opposée. Cherchons s'il est possible de régulariser le théorème; laissons *fixes* les éléments A_1, A_2, ..., A_{p-1} et faisons varier A_p : l'élément $a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p$ varie et nous étudions s'il reste *uni* à un certain élément, de même nature que les éléments à $p+1$, $p+3$, ... lettres; si ce n'est pas réalisé, le théorème est irrégulier; si l'élément inconnu cherché existe, nous l'adoptons comme représentation du symbole $a_1 a_2 \dots a_{p-1}$ et nous rendons leur liberté à A_1, A_2, ..., A_{p-1}; nous sommes ramenés à un problème de même nature, où p a été remplacé par $p-1$ et ainsi de suite, soit jusqu'à l'échec, soit jusqu'à la réussite, qui se traduit par la définition de l'élément *unité*.

Pour le théorème P., trois droites A_1, A_2, A_3 conduisent au lieu rectiligne $a_1 a_2 a_3$; nous avons vu que, A_1, A_2 restant fixes et A_3 variant, la droite $a_1 a_2 a_3$ peut venir coïncider avec une droite quelconque du plan, donc ne reste *unie* à aucun point fixe : le théorème P. est irrégulier.

Prenons le cas des théorèmes irréguliers : *ils semblent se partager en diverses classes, caractérisées chacune par la valeur de l'entier p* indiqué à l'instant; il suffit d'un changement de notations pour montrer que *cette classification ne doit pas être adoptée*. Considérons en effet les êtres A_1, A_2, ..., A_{p-1} que nous laisserons fixes comme précédemment et adoptons la notation B_1, $B_2 \dots B_n \dots$ pour les êtres que nous appelions A_p, A_{p+1}, ..., A_{p-n+1}, et b_1, $b_1 b_2$, ..., pour les éléments appelés précédemment $(a_1 a_2 \dots a_{p-1}) a_p$, $(a_1 a_2 \dots a_{p-1}) a_p a_{p-1}$, ... : nous avons donc une configuration récurrente alternée, dépendant des êtres initiaux A_1, A_2, ..., A_{p-1}; *l'irrégularité est, avec les nouvelles notations, caractérisée par l'impossibilité de définir l'élément* 1. C'est ainsi que la configuration M. C. quand on la détermine dans le plan projectif (et non anallagmatique) avec des droites $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ est irrégulière. La configuration obtenue avec les multipoints focaux des courbes $f_c(u, v) + w^p f_{c-p}(u, v) = 0$ donne la configuration M. C. pour $p=1$, et si p est supérieur à 1, se déduit de la configuration M. C. (avec des droites au début) par une transformation représentée en abrégé par $z = Z^p$, où z se rapporte à la configuration M. C. et Z à la nouvelle configuration : à un certain point de vue, on peut donc objecter à la recherche faite à ce propos, qu'il était beaucoup plus simple de définir la

configuration M. C., sans avoir à faire intervenir les courbes

$$f_c(u, v) + wf_{c-1}(u, v) = 0.$$

puis d'appliquer à cette configuration la transformation $z = Z^p$, ce qui eût dispensé d'étudier les courbes auxiliaires $f_c(u, v) + w^p f_{c-p}(u, v) = 0$, d'autant plus que la transformation $z = Z^p$ ne joue pas pour faire passer des courbes auxiliaires du théorème M. C. aux courbes auxiliaires de la nouvelle proposition; nous n'en avons pas moins obtenu des théorèmes intéressants pour certaines classes de courbes algébriques.

Nous devons remarquer qu'en adoptant ce mode de classification, où $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ ont été groupés et rendus fixes, la configuration déduite de $(A_1, A_1, \ldots, A_{p-1})$, $A_p, \ldots, A_n, \ldots$ perd tous les éléments qui, primitivement, s'obtiennent par suppression d'un ou plusieurs êtres choisis parmi $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$.

Nous espérons que cette étude permettra de faire un tri parmi les nombreux théorèmes récurrents alternés, réguliers et irréguliers, qui ont pris naissance ces derniers temps, ou de préciser leurs énoncés; elle a mis en évidence l'importance du théorème de Miquel et Clifford comme prototype des théorèmes de l'une et de l'autre catégorie.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENCES

DES

FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

1. On a remarqué depuis longtemps que la définition de la dérivée d'ordre n d'une fonction d'une variable réelle en un point x_0 est, à certains égards, assez peu satisfaisante pour $n > 1$, parce qu'elle fait intervenir n passages à la limite successifs au lieu de donner directement la dérivée d'ordre n comme limite d'une expression ne faisant intervenir que les valeurs de la fonction elle-même et non celles de ses dérivées d'ordre inférieur à n. On a donc cherché de telles définitions « directes »; une des plus étudiées provient de la théorie de l'interpolation : on y considère les « différences divisées » successives d'une fonction f; ce sont les expressions définies par récurrence de la manière suivante :

$$[x_0; f] = f(x_0),$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] - [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}$$

pour $n+1$ valeurs distinctes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la variable. On montre alors que lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers x_0 (en restant distincts deux à deux et distincts de x_0), la différence divisée d'ordre n, $[x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$ tend vers $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ lorsque f admet une dérivée d'ordre n au point x_0 (1). Le problème inverse se pose naturellement aussitôt : que peut-on dire des dérivées de f lorsque la limite de la différence divisée d'ordre n existe et est finie ? Cette question a été entièrement résolue par M. E. Hopf dans sa Thèse (2); le résultat

(1) Résultat dû à Stieltjes (*Œuvres complètes*, t. 1, p. 67).

(2) *Uber die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften* (Inaug.-Diss., Berlin, 1926). Les résultats de E. Hopf ont été retrouvés par M. T. Popoviciu et publiés par lui dans sa Thèse quelques années plus tard [*Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* (*Mathematica*, Cluj, t. 8, 1934, p. 1-85)].

est qu'en un certain sens, la fonction admet « presque » une dérivée $n^{\text{ième}}$ au point x_0.

Au lieu des « différences divisées » précédentes, il paraît plus naturel, quand on songe à la définition de la dérivée d'ordre n par récurrence, de considérer les *différences* successives de f, définies par les relations

$$\Delta f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0),$$
$$\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n) = \Delta^{n-1} f(x_0 + h_n; h_1, \ldots, h_{n-1}) - \Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

On sait que, lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent indépendamment vers zéro, le rapport $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ tend vers $f^{(n)}(x_0)$ lorsque cette dérivée existe (¹). Ici encore, il y a lieu de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette limite existe et soit finie; c'est ce que nous allons faire dans cet article, et nous verrons que, si l'on se limite aux fonctions bornées, la condition cherchée est *identique* à celle de E. Hopf (²).

Cette identité de résultats, et l'analogie entre la formation de $\Delta^n f$ et des « différences divisées » pourrait faire penser au premier abord que notre proposition est un corollaire immédiat de celle de E. Hopf; un peu de réflexion prouve qu'il n'en est rien : par exemple, lorsque $n = 2$, l'hypothèse que la différence divisée $[x_0, x_1, x_2; f]$ reste bornée pour x_1 et x_2 voisins de x_0 se traduit immédiatement par l'inégalité

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| \leqq M |x_2 - x_1|$$

(M nombre fixe), et il en résulte aussitôt (critère de Cauchy) que f admet une dérivée première au point x_0. Au contraire, l'inégalité $|\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)| \leqq M |h_1 h_2|$ s'écrit

$$\left| \frac{f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0)}{h_1 h_2} \right| \leqq M$$

et il n'en résulte pas avec la même évidence que la dérivée première de f existe au point x_0 (ce qui est pourtant le cas, comme nous allons le voir, lorsque f est bornée).

2. Le résultat essentiel sur lequel nous nous appuierons est le suivant :

Lemme 1. — *Soit f une fonction bornée au voisinage de x_0, et telle que le rapport $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ reste borné lorsque les h_i sont assez voisins de zéro. Dans ces conditions, le rapport $\frac{\Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}$ tend vers une limite finie lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ tendent vers zéro.*

(¹) *Voir* par exemple E. Hobson, *The theory of functions of a real variable*, t. 1, 3e éd., p. 370.
(²) *Loc. cit.*, p. 19-22.

Nous allons faire la démonstration pour $n=3$ pour simplifier l'écriture, mais le lecteur verra aisément que le raisonnement est général.

Par hypothèse, il existe deux nombres positifs M et r tels que pour $|h_1|\leqq r$, $|h_2|\leqq r$ et $|h_3|\leqq r$, on aït

$$(1)\qquad |\Delta^2 f(x_0+h_3;\ h_1,\ h_2)-\Delta^2 f(x_0;\ h_1,\ h_2)|\leqq \mathrm{M}|h_1h_2h_3|.$$

Soient z_1, z_2 deux nombres tels que $|z_1|\leqq r$, $|z_2|\leqq r$, et soient m et n deux entiers positifs quelconques; donnons à h_1 la valeur $\frac{z_1}{m}$, à h_2 la valeur $\frac{z_2}{n}$, et successivement à h_3 chacune des mn valeurs $\frac{pz_1}{m}+\frac{qz_2}{n}$ (p, q entiers tels que $0\leqq p\leqq m-1$, $0\leqq q\leqq n-1$) dans l'inégalité (1); ajoutant les mn inégalités ainsi obtenues, il vient

$$(2)\qquad \left|\Delta^2 f(x_0;\ z_1,\ z_2)-mn\,\Delta^2 f\left(x_0;\ \frac{z_1}{m},\ \frac{z_2}{n}\right)\right|$$
$$\leqq \mathrm{M}\frac{|z_1z_2|}{mn}\left[\frac{n(m-1)}{2}|z_1|+\frac{m(n-1)}{2}|z_2|\right]\leqq \frac{\mathrm{M}}{2}|z_1z_2|(|z_1|+|z_2|).$$

En donnant à m et n toutes les valeurs entières >0, et à z_1 et z_2 toutes les valeurs telles que

$$\frac{r}{2}\leqq|z_1|\leqq r,\qquad \frac{r}{2}\leqq|z_2|\leqq r,$$

on déduit d'abord de cette relation, compte tenu du fait que f est supposée bornée pour $|x-x_0|\leqq r$, que $\frac{\Delta^2 f(x_0;\ h_1,\ h_2)}{h_1h_2}$ est borné pour $|h_1|\leqq\frac{r}{2}$, $|h_2|\leqq\frac{r}{2}$, donc aussi pour $|h_1|\leqq r$, $|h_2|\leqq r$.

La même méthode, appliquée à $\Delta^2 f$ au lieu de $\Delta^3 f$, prouve ensuite que $\frac{\Delta f(x_0;\ h_1)}{h_1}$ est borné pour $|h_1|\leqq r$, résultat qui établit d'abord la *continuité* de f au point x_0. Comme $\frac{\Delta^2 f(x_0;\ h_1,\ h_2)}{h_1h_2}$ est borné pour $|h_1|\leqq r$, $|h_2|\leqq r$, on a

$$|[f(x_0+h_1+h_2)-f(x_0+h_2)]-[f(x_0+h_1)-f(x_0)]|\leqq \mathrm{A}|h_1h_2|,$$

ce qui, en faisant tendre h_1 vers zéro, prouve la *continuité* de f pour $|x-x_0|\leqq r$.

Cela étant, revenons à l'inégalité (2); $\varepsilon>0$ étant donné arbitrairement, choisissons $a>0$ tel que $a<\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$ et $a<r$; puis déterminons un nombre b tel que $0<b<a$, et que, lorsque z_1 et z_2 varient arbitrairement dans l'intervalle d'extrémités b et a, la fonction continue $\frac{\Delta^2 f(x_0;\ z_1,\ z_2)}{z_1z_2}$ varie de moins de ε; en choisissant convenablement les entiers m et n, on peut toujours faire en sorte que, pour deux nombres h_1 et h_2 appartenant à l'intervalle d'extrémités 0 et $a-b$, $z_1=mh_1$ et $z_2=nh_2$ appartiennent à l'intervalle d'extrémités b et a; l'inégalité (2) prouve par suite que, lorsque h_1 et h_2 varient dans l'intervalle

d'extrémités o et $a-b$, la fonction $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ varie de moins de 3ε. D'autre part, en remplaçant h_2 par $-h_1$ dans (1), il vient

$$\left|\frac{\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2)}{(-h_1)h_2} - \frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}\right| \leqq M|h_1| \leqq \varepsilon$$

et en remplaçant de même h_3 par $-h_2$ ou par $-(h_1+h_2)$ dans (1), on voit finalement que lorsque h_1 et h_2 varient de sorte que $|h_1| \leqq a-b$ et $|h_2| \leqq a-b$, $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ varie de moins de 5ε. Comme ε est arbitraire, cela démontre l'existence de la limite de $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro, en vertu du critère de Cauchy.

On déduit de ce lemme le suivant :

LEMME 2. — *Lorsque, pour* $n > 2$, $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ *reste borné quand les* h_i *sont assez petits,* f *est dérivable dans un voisinage de* x_0.

D'après le lemme 1, il suffit de démontrer la proposition lorsque $n=3$. Or, la relation $|\Delta^3 f(x_0; h_1, h_2, h_3)| \leqq A|h_1 h_2 h_3|$ s'écrit

$$\left|\frac{\Delta^2 f(x_0+h_3; h_1, h_2)}{h_1 h_2} - \frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}\right| \leqq A|h_3|.$$

Comme, d'après le lemme 1, $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ reste borné lorsque h_1 et h_2 sont assez petits, on voit que pour tout h_3 *fixe* assez petit, $\frac{\Delta^2 f(x_0+h_3; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ reste borné lorsque h_1 et h_2 sont assez petits; d'après le lemme 1, cela prouve que f admet une dérivée au point x_0+h_3.

3. Nous allons maintenant démontrer notre résultat central.

THÉORÈME 1. — *Soit* f *une fonction bornée au voisinage de* x_0. *Pour que le rapport* $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ *tende vers une limite a lorsque* $h_1, \ldots, h_n$ *tendent vers zéro, il faut et il suffit que :*

1° f *admette une dérivée d'ordre* $n-2$ *en tout point d'un intervalle ouvert* I *contenant* x_0, *et une dérivée d'ordre* $n-1$ *au point* x_0;

2° *On ait* $f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt$, *où* u *est une fonction sommable et bornée dans l'intervalle* I, *et* $f^{(n-1)}(x_0) = u(x_0)$;

3° *Si* H *est l'ensemble des points de* I *où* $f^{(n-2)}$ *admet* u *comme dérivée* (le complémentaire de H par rapport à I étant de mesure nulle) *le rapport* $\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ *tend vers* a *lorsque* h *tend vers zéro, de sorte que* x_0+h *reste dans* H.

Montrons d'abord que la condition est *nécessaire*. D'après le lemme 2, nous pouvons raisonner par récurrence lorsque $n > 2$; en effet, l'hypothèse entraîne que f est dérivable dans un voisinage de x_0; d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \frac{1}{h_n} \left[\frac{\Delta^{n-1} f(x_0 + h_n; h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} \right] - a \right| \leqq \varepsilon$$

dès que les h_i sont assez petits. Si, dans cette relation, on fait tendre h_n vers zéro, les autres h_i restant fixes, il vient

$$\left| \frac{\Delta^{n-1} f'(x_0; h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} - a \right| \leqq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\frac{\Delta^{n-1} f'(x_0; h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}$ tend vers a lorsque les h_i tendent vers zéro : or, on ne change pas les trois conditions de l'énoncé en y remplaçant n par $n-1$ et f par f'.

Nous sommes ainsi ramenés à démontrer le théorème lorsque $n = 2$; d'après le lemme 1, f admet alors une dérivée au point x_0; ce fait, et la relation

$$(3). \qquad \left| \frac{f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1)}{h_2} - \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2} - a h_1 \right| \leqq \varepsilon |h_1|$$

entraînent que f a ses nombres dérivés *bornés* dans un intervalle ouvert I contenant x_0; on en conclut (1) que $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt$, où u est une fonction sommable bornée dans I; en outre, $f(x)$ a pour dérivée $u(x)$ en tous les points de I, sauf aux points d'un ensemble K de mesure nulle (auquel n'appartient d'ailleurs pas x_0). Si, dans (3), on suppose que $x_0 + h_1$ n'appartient pas à K, on peut donc faire tendre h_2 vers zéro, et il vient

$$|u(x_0 + h_1) - u(x_0) - a h_1| \leqq \varepsilon |h_1|,$$

ce qui prouve que le rapport $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$ tend vers a lorsque $x_0 + h$ tend vers x_0 en restant dans le complémentaire de l'ensemble K.

Prouvons maintenant que la condition de l'énoncé est *suffisante*. Raisonnons de nouveau par récurrence : la dérivée de $\Delta^{n-1} f(x; h_1, \ldots, h_{n-1})$ est $\Delta^{n-1} f'(x; h_1, \ldots, h_{n-1})$; par hypothèse, on a, lorsque les h_i sont assez petits,

$$|\Delta^{n-1} f'(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) - a h_1 h_2 \ldots h_{n-1})| \leqq \varepsilon |h_1 h_2 \ldots h_{n-1}|,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{l} \Delta^{n-2} f'(x_0 + h_{n-1}; h_1, \ldots, h_{n-2}) \\ - \Delta^{n-2} f'(x_0; h_1, \ldots, h_{n-2}) - a h_1 h_2 \ldots h_{n-1} \end{array} \right| \leqq \varepsilon |h_1 h_2 \ldots h_{n-1}|.$$

(1) Théorème classique de Lebesgue (*voir*, par exemple, H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 1re éd., p. 123).

Remplaçant successivement h_{n-1} par h et $h+h_{n-1}$ dans (4), et retranchant, il vient

$$|\Delta^{n-1}f'(x_0+h;\,h_1,\,h_2,\,\ldots,\,h_{n-1})-ah_1h_2\ldots h_{n-1}|\leqq\varepsilon|h_1h_2\ldots h_{n-2}|(|h|+|h+h_{n-1}|)$$

et par suite, d'après le théorème des accroissements finis, appliqué pour h variant entre zéro et h_n, on a

$$|\Delta^n f(x_0;\,h_1,\,h_2,\,\ldots,\,h_n)-ah_1h_2\ldots h_n|\leqq\varepsilon|h_1h_2\ldots h_{n-2}|(2|h_n|+|h_{n-1}|)\,|h_n|.$$

Si $|h_n|\leqq|h_{n-1}|$, on déduit de là que

$$|\Delta^n f(x_0;\,h_1,\,h_2,\,\ldots,\,h_n)-ah_1h_2\ldots h_n|\leqq 3\varepsilon|h_1h_2\ldots h_{n-1}h_n|.$$

Sinon, il suffit de permuter h_{n-1} et h_n pour obtenir la même inégalité, en tenant compte de la symétrie de $\Delta^n f(x_0;\,h_1,\,h_2,\,\ldots,\,h_n)$.

Nous sommes donc ramenés à démontrer la proposition pour $n=2$; on a alors

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}u(t)\,dt,$$

où u est sommable et bornée; en outre, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $r>0$ tel que, dans l'intervalle $x_0-r<x<x_0+r$, on ait, en tout point x où $f'(x)$ existe et est égale à $u(x)$, $|u(x)-u(x_0)-a(x-x_0)|\leqq\varepsilon|x-x_0|$. On en conclut aussitôt que, pour $|h_1|<\frac{r}{2}$, on a, pour $|x-x_0|<\frac{r}{2}$,

$$|u(x+h_1)-u(x)-ah_1|\leqq\varepsilon(|x-x_0|+|x+h_1-x_0|),$$

sauf aux points x appartenant à un ensemble de mesure nulle [réunion de l'ensemble des points où $f'(x)$ n'existe pas ou est $\neq u(x)$, et de cet ensemble auquel on a fait subir la translation $-h_1$]; pour tout h_2 tel que $|h_2|<\frac{r}{2}$, on a, par suite

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h_2}[u(t+h_1)-u(t)]\,dt-ah_1h_2\right|\leqq\varepsilon(2|h_2|+|h_1|)|h_2|,$$

c'est-à-dire

$$|\Delta^2 f(x_0;\,h_1,\,h_2)-ah_1h_2|\leqq\varepsilon(2|h_2|+|h_1|)|h_2|.$$

Si $|h_2|\leqq|h_1|$, on déduit de là

$$|\Delta^2 f(x_0;\,h_1,\,h_2)-ah_1h_2|\leqq 3\varepsilon|h_1||h_2|.$$

Dans le cas contraire, il suffit de permuter h_1 et h_2 pour avoir encore la même inégalité, ce qui prouve bien que $\frac{\Delta^2 f(x_0;\,h_1,\,h_2)}{h_1h_2}$ tend vers a lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro, et achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Soit f une fonction bornée dans un intervalle ouvert* I. *Pour que, en tout point x de* I, *le rapport* $\frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ *tende vers une limite lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que f admette une dérivée d'ordre n en tout point de* I.

En effet, d'après le théorème précédent, si $\frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ a une limite pour tout point x de I, $f^{(n-1)}(x)$ existe quel que soit x, et $u(x) = f^{(n-1)}(x)$; en outre, comme $f^{(n-2)}$ admet u comme dérivée en tout point, u admet une dérivée en tout point de I, ce qui signifie que $f^{(n)}(x)$ existe pour tout x dans I.

On notera que l'hypothèse que la fonction f est *bornée* est essentielle pour la validité de tous les résultats précédents; en effet, si f est une fonction discontinue satisfaisant à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (on sait qu'il existe de telles fonctions, qui ne sont bornées dans aucun intervalle) on a $\Delta^p f(x; h_1, \ldots, h_p) = 0$ quels que soient x et les h_i, pour tout entier $p \geq 2$.

4. On démontre de la même manière le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction bornée au voisinage de x_0. Pour que le rapport* $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ *reste borné lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que :*

1° *f admette une dérivée d'ordre $n-2$ en tout point d'un intervalle ouvert* I *contenant x_0, et une dérivée d'ordre $n-1$ au point x_0;*

2° *On ait* $f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt$, *où u est une fonction sommable et bornée dans* I, *et $f^{(n-1)}(x_0) = u(x_0)$;*

3° *Si* H *est l'ensemble des points où $f^{(n-2)}$ admet u comme dérivée, le rapport* $\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$ *reste borné lorsque $x_0 + h$ tend vers x_0 en restant dans* H.

En effet, le lemme 2 permet, par récurrence sur n, d'être ramené à démontrer la nécessité des conditions de l'énoncé dans le cas où $n = 2$; et dans ce dernier cas, le raisonnement est tout à fait analogue à celui du théorème 1. On démontre également que les conditions sont suffisantes, en procédant exactement comme dans la seconde partie de la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE. — *Soit f une fonction bornée dans un intervalle ouvert* I. *Pour que, en tout point x de* I, *le rapport* $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ *reste borné* (par un nombre dépendant de x) *lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que f admette une dérivée d'ordre $n-1$ en tout point de* I, *et que les nombres dérivés de $f^{(n-1)}$ soient finis en tout point de* I.

En effet, d'après le théorème 2, $f^{(n-1)}(x)$ existe quel que soit x, et $f^{(n-1)}(x)=u(x)$; en outre, pour un x quelconque dans I, le rapport $\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ reste borné (par un nombre dépendant de x) lorsque h tend vers zéro de manière quelconque, puisque $f^{(n-2)}$ admet u comme dérivée en tout point.

5. Élargissant encore nos hypothèses, nous allons seulement supposer qu'au voisinage de x_0, $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_1 \ldots h_n}$ reste borné dans un seul sens, par exemple *borné inférieurement*; en ajoutant à f un monôme ax^n, on peut toujours supposer que la condition imposée à f est $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} \geqq 0$ lorsque les h_i sont assez petits.

Raisonnons de nouveau pour simplifier dans le cas où $n=3$; la généralisation au cas où n est quelconque étant facile. Par hypothèse, on a

$$\Delta^2 f(x_0+h_3; h_1, h_2) - \Delta^2 f(x_0; h_1, h_2) \geqq 0 \tag{5}$$

lorsque h_1, h_2, h_3 sont assez petits et $h_1 h_2 h_3 > 0$; le sens de l'inégalité doit être renversé lorsque $h_1 h_2 h_3 < 0$.

Supposons d'abord $h_1 = \frac{z_1}{m} > 0$, $h_2 = \frac{z_2}{n} > 0$ et donnons à h_3 les valeurs $\frac{pz_1}{m} + \frac{qz_2}{n}$ dans (5) ($0 \leqq p \leqq m-1$, $0 \leqq q \leqq n-1$); ajoutant les inégalités obtenues, il vient

$$\Delta^2 f(x_0; z_1, z_2) - mn\, \Delta^2 f\left(x_0; \frac{z_1}{m}, \frac{z_2}{n}\right) \geqq 0$$

pour z_1 et z_2 assez petits et positifs; on conclut aussitôt de là et du fait que f est bornée, que $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ est *borné supérieurement* lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro par valeurs > 0. De la même manière, on déduit de l'inégalité (5) renversée que

$$\Delta^2 f(x_0; -z_1, -z_2) - mn\, \Delta^2 f\left(x_0; -\frac{z_1}{m}, -\frac{z_2}{n}\right) \leqq 0$$

et par suite que $\frac{\Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2)}{h_1 h_2}$ est *borné inférieurement* lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro par valeurs > 0. D'autre part, en remplaçant h_3 par $-h_1$ dans l'inégalité (5) renversée, il vient

$$\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2) \geqq -\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2);$$

et de même l'inégalité

$$\Delta^2 f(x_0+h_1; -h_1, -h_2) - \Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2) \geqq 0$$

s'écrit

$$\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2) \leqq -\Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2).$$

Finalement, pour h_1 et h_2 positifs, on a

$$\Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2) \leqq -\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2) \leqq \Delta^2 f(x_0; h_1, h_2),$$

d'où l'on tire la conclusion que $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ est *borné* lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro avec un signe *quelconque*.

Ainsi, l'analogue du lemme 1 du n° 2 est que, si $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} \geqq 0$ lorsque les h_i tendent vers zéro, $\frac{\Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}$ reste *borné* lorsque les h_i tendent vers zéro. Appliquant le théorème 2, on en déduit tout d'abord que $f^{(n-3)}$ existe dans un intervalle ouvert I contenant x_0. Dans la relation $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} \geqq 0$, en faisant tendre successivement vers zéro les variables $h_n, h_{n-1}, \ldots, h_4$, il vient $\frac{\Delta^3 f^{(n-3)}(x_0; h_1, h_2, h_3)}{h_1 h_2 h_3} \geqq 0$; autrement dit, on peut se borner à considérer le cas où $n = 3$. Alors comme $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ reste borné, on a $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt$, où u est une fonction sommable et bornée dans un intervalle ouvert I contenant x_0; en outre, si H est l'ensemble des points de I où f admet u comme dérivée, x_0 appartient à H et $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$ reste borné lorsque $x_0 + h$ tend vers zéro en restant dans H (th. 2).

Si l'on suppose que les points $x_0 + h_1$, $x_0 + h_2$, $x_0 + h_1 + h_2$ appartiennent à H, on déduit de la relation $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2, h_3)}{h_1 h_2 h_3} \geqq 0$, en faisant tendre h_3 vers zéro, que $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geqq 0$. D'autre part, il existe un nombre fini a tel que, lorsque $x_0 + h$ appartient à H, $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \geqq a$; si l'on pose $v(x) = u(x) - a(x - x_0)$, on a donc $\frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \geqq 0$ lorsque $x_0 + h$ appartient à H, et

$$\frac{\Delta^2 v(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geqq 0$$

si $x_0 + h_1$, $x_0 + h_2$ et $x_0 + h_1 + h_2$ appartiennent à H. Soit I_1 la partie de l'intervalle I formée des points $x \geqq x_0$, H_1 l'intersection de I_1 et de H. Si $x_0 + h_1$ appartient à H_1, on a donc

$$\frac{v(x_0 + h_1 + h_2) - v(x_0 + h_1)}{h_2} \geqq \frac{v(x_0 + h_2) - v(x_0)}{h_2} \geqq 0$$

pour $h_2 > 0$ et $x_0 + h_1 + h_2$ dans I_1, sauf pour un ensemble de valeurs de h_2 de mesure nulle. Nous allons en déduire que, dans I_1, $v(x)$ est égale *presque partout* à une fonction *croissante*. En effet, pour tout $x \in I_1$, désignons par $w(x)$ la *borne inférieure en mesure* des valeurs de $v(y)$ pour $y \in I_1$ et $y \geqq x$; $w(x)$ est évidemment croissante dans I_1, et d'après ce qui précède, on a $v(x) \leqq w(x)$

presque partout. Montrons qu'on ne peut avoir $v(x) < w(x)$ sur un ensemble de mesure positive ; sinon, on aurait aussi $v(x) < w(x) - \frac{1}{n}$ sur un ensemble E de mesure positive, pour un entier n convenable. En presque tous les points x de E, tout intervalle d'origine x a une intersection avec E qui est de mesure positive ; on peut en outre trouver un tel point où $w(x)$ est continue à droite, puisque cette fonction croissante n'a qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité. On peut alors trouver un intervalle $x \leqq y \leqq x + h$ dans lequel $w(y) \leqq w(x) + \frac{1}{n}$; en tous les points de cet intervalle appartenant à E, on aurait donc $v(y) < w(x)$; mais comme ces points forment un ensemble de mesure positive, cela contredirait la définition de $w(x)$. On a donc $v(x) = w(x)$ presque partout. On raisonne de la même manière dans la partie I_2 de I formée des points $x \leqq x_0$, et l'on voit ainsi qu'on peut modifier la valeur de u aux points d'un ensemble de mesure nulle (ce qui ne modifie pas la fonction f), de sorte que u ait en *tout point* de I une limite à droite et une limite à gauche ; il en résulte qu'en tout point x de I, f admet une dérivée à droite égale à $u(x + 0)$ et une dérivée à gauche égale à $u(x - 0)$, ces dérivées étant égales sauf aux points d'un ensemble dénombrable. De plus, en supposant u continue à droite (ce qui revient à modifier éventuellement sa valeur aux points de discontinuité de u, qui forment un ensemble dénombrable), on a la relation $\frac{\Delta^2 u(x_0 ; h_1, h_2)}{h_0 h_2} \geqq 0$ dans I *tout entier*, en faisant tendre h_3 vers zéro par valeurs $\geqq 0$ dans l'inégalité $\frac{\Delta^2 f(x_0 ; h_1, h_2, h_3)}{h_1 h_2 h_3} \geqq 0$.

Nous allons en déduire qu'au point x_0, u admet une *dérivée à droite* finie. En effet, par le même raisonnement qu'au début de ce numéro, on voit que pour $z > 0$, on a, pour tout entier $m > 0$

$$\frac{u\left(x_0 + \frac{z}{m}\right) - u(x_0)}{\frac{z}{m}} \leqq \frac{u(x_0 + z) - u(x_0)}{z}. \tag{6}$$

Si l'on fait varier z dans un voisinage d'un point x où u est continue, on voit donc que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour $0 < h \leqq r$, on ait

$$\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \leqq \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \varepsilon.$$

Or u est continue à droite en tout point, et est continue sauf aux points d'un ensemble dénombrable ; on en conclut immédiatement que, si b est la limite inférieure de $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers zéro par valeurs > 0, il existe des points $x > x_0$ où u est continue et $\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \leqq b + \varepsilon$; il existe par suite un *intervalle* d'origine x_0 dans lequel $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \leqq b + 2\varepsilon$;

d'après la définition de b, cela entraîne que b est la *limite* de $\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers zéro par valeurs >0. On démontre de même l'existence de la dérivée à gauche de u au point x_0; d'ailleurs, de la relation $\Delta^2 u(x_0; h_1, -h_1) \leqq 0$, on déduit, en faisant tendre h_1 vers zéro par valeurs >0, que $u'_+(x_0) \geqq u'_-(x_0)$.

On peut résumer les résultats de ce numéro dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit f une fonction bornée au voisinage de x_0. Pour que le rapport $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ reste $\geqq 0$ lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que :*

1° *f admette une dérivée d'ordre $n-3$ en tout point d'un intervalle ouvert* I *contenant x_0;*

2° *$f^{(n-3)}$ admette en tout point de* I *une dérivée à droite u, qui est une fonction à variation bornée telle que $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$ reste $\geqq 0$ lorsque h_1 et h_2 tendent vers zéro.*

Ici encore, nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la condition est suffisante.

COROLLAIRE. — *Soit f une fonction bornée dans un intervalle ouvert* I. *Pour que, en tout point x de* I, *le rapport $\frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$ reste $\geqq 0$ lorsque $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que f admette une dérivée d'ordre $n-2$ en tout point de* I, *et que $f^{(n-2)}$ soit une fonction convexe dans* I.

En effet, d'après le théorème 3, $f^{(n-3)}$ admet alors une dérivée à droite *continue* en tout point, donc une *dérivée* en tout point, égale à la fonction u; en outre, u admet alors en tout point de I une dérivée à droite, et satisfait à la relation $\frac{\Delta^2 u(x; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geqq 0$ au voisinage de tout point x de I ; en faisant tendre h_2 vers zéro par valeurs positives dans cette relation, on en déduit que $u'_+(x)$ est croissante au voisinage de tout point de I, donc, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, $u'_+(x)$ est croissante dans I, ce qui équivaut, comme on sait, à la convexité de la fonction u.

6. Dans le théorème 3, il semble difficile de remplacer la condition $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geqq 0$ par une condition équivalente plus simple pour u. Nous avons déjà tiré quelques conséquences de cette condition; indiquons encore la suivante : la dérivée à droite $u'(x_0)$ est non seulement la limite de $\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ lorsque x_0+h tend vers x_0 dans I, mais encore la *borne*

inférieure de ce rapport dans I_1 ; cela résulte aussitôt de l'inégalité (6). On peut encore dire que, dans l'intervalle I_1, la courbe représentative $y = u(x)$ est tout entière *au-dessus* de sa demi-tangente à droite au point x_0 ; de même dans I_2, elle est tout entière au-dessus de sa demi-tangente à gauche au point x_0. Mais il est facile de voir que ces conditions ne sont nullement suffisantes.

Une autre conséquence est qu'en tout point de I_1 où u admet une dérivée, c'est-à-dire presque partout, on a $u'(x) \geqq u'_+(x_0)$ et de même, en tout point de I_2 où u admet une dérivée, on a $u'(x) \leqq u'_-(x_0)$; mais ici encore, ces conditions ne sont nullement suffisantes.

Une condition évidemment suffisante est la *convexité* de u dans I ; mais cette condition n'est pas nécessaire. Il n'est même pas nécessaire que le rapport $\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ soit fonction croissante de h dans I.

Enfin, la fonction u étant, dans I_1, différence d'une fonction croissante u_1 et d'une fonction linéaire, on peut se demander si dans la décomposition de u_1 en somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière, la partie singulière peut effectivement se présenter ; on constate sur des exemples que tel est bien le cas.

Pour former des exemples de tous ces phénomènes, on peut utiliser la méthode générale suivante : on commence par former une fonction croissante w dans l'intervalle $0 \leqq x < +\infty$, qui satisfasse à l'inégalité

$$w(x+y) \geqq w(x) + w(y) \qquad \text{pour } x \geqq 0, \quad y \geqq 0,$$

soit nulle dans un certain intervalle d'origine 0, et soit telle que $w(x) \leqq x$. On considère ensuite la fonction croissante

$$(7) \qquad u(x) = w(x) + aw(2x) + a^2 w(2^2 x) + \ldots + a^n w(2^n x) + \ldots,$$

où a est un nombre $< \frac{1}{2}$, qu'on peut choisir arbitrairement petit ; il est clair que u satisfera encore à $u(x+y) \geqq u(x) + u(y)$.

On peut prendre par exemple $w(x) = 0$ pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $w(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ pour $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$, puis $w(x+1) = w(x) + 1$ pour toutes les autres valeurs de $x > 0$. On constate alors aisément que si l'on prend le nombre a assez petit, la fonction u définie par (7) est telle que $\frac{u(h)-u(0)}{h}$ ne soit croissante dans aucun intervalle contenant zéro.

On a un résultat analogue en prenant $w(x) = 0$ pour $0 \leqq x < 1$, puis $w(x+1) = w(x) + 1$ pour les autres valeurs de x ; en outre, ici la fonction u est une fonction discontinue ayant presque partout sa dérivée nulle, si le nombre a est assez petit.

Enfin, si l'on prend $w(x)$ continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, égale à zéro pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, à 1 pour $x = 1$, à une fonction croissante continue singulière et $\leqq x$ pour $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$, la fonction u donnée par (7) est continue et croissante, mais sa partie singulière n'est nulle dans aucun intervalle contenant zéro.

7. Nous terminerons ce travail en indiquant comment les résultats des n^os^ 2 à 4 se généralisent aux fonctions de plusieurs variables réelles.

Supposons que f soit fonction d'un point $\mathbf{x}$ variable au voisinage d'un point $\mathbf{x}_0$ dans l'espace $\mathbf{R}^m$ à m dimensions (c'est-à-dire, si l'on veut, que f soit fonction des m variables réelles, coordonnées de $\mathbf{x}$); nous désignerons par $|\mathbf{x}|$ une norme sur $\mathbf{R}^m$ qu'il n'est pas besoin de préciser davantage (on sait qu'elles sont toutes équivalentes). Rappelons la forme qu'on peut donner à la notion de *différentielle* (Stolz) : f est différentiable au point $\mathbf{x}_0$ s'il existe une fonction linéaire u définie dans $\mathbf{R}^m$, telle que $|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{h})| \leqq \varepsilon|\mathbf{h}|$ dès que $|\mathbf{h}|$ est assez petit; u est la *différentielle première* de f au point $\mathbf{x}_0$ et $u(\mathbf{h})$ est aussi noté $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})$. Si, pour chaque valeur de $\mathbf{h}$, $df(\mathbf{x}; \mathbf{h})$ considéré comme fonction de $\mathbf{x}$ possède une différentielle au point $\mathbf{x}_0$, cette différentielle, notée $d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{k})$ est une fonction bilinéaire symétrique de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$.

On définit ainsi par récurrence (lorsqu'elle existe) la différentielle $n^{\text{ième}}$ $d^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$ de f au point $\mathbf{x}_0$: c'est une fonction multilinéaire symétrique des n vecteurs $\mathbf{h}_i$; pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|d^{n-1}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_n; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|,$$

quels que soient $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-1}$, et dès que $\mathbf{h}_n$ est assez petit.

Cela étant, les *différences* $\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n)$ d'une fonction f se définissent exactement comme au n° 1, où x_0 et les h_i doivent être remplacés par des points arbitraires de $\mathbf{R}^m$. Le début du raisonnement du lemme 1 du n° 2 se répète sans modification essentielle, et prouve que si f est bornée au voisinage de $\mathbf{x}_0$, et si $\dfrac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n)}{|\mathbf{h}_1| \ldots |\mathbf{h}_n|}$ est bornée lorsque les $\mathbf{h}_i$ sont assez petits, il en est de même de $\dfrac{\Delta^p f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_p)}{|\mathbf{h}_1| \ldots |\mathbf{h}_p|}$ pour $1 \leqq p \leqq n$; en particulier, f est *continue* dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$ (si l'on a supposé $n \geqq 2$).

Montrons maintenant que, si $\dfrac{\Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{|\mathbf{h}_1| \cdot |\mathbf{h}_2|}$ est borné lorsque $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$ sont assez petits, f est *différentiable* au point $\mathbf{x}_0$. Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre de dimensions m de l'espace $\mathbf{R}^m$, la proposition résultant du lemme 1 du n° 2 pour $m = 1$. $\mathbf{R}^m$ peut être considéré comme *somme directe* d'un sous-espace U à 1 dimension et d'un sous-espace V à $m-1$ dimensions; l'hypothèse entraîne donc que si l'on *restreint* f aux variétés linéaires $\mathbf{x}_0 + \mathrm{U}$ et $\mathbf{x}_0 + \mathrm{V}$, les fonctions obtenues sont différentiables au point $\mathbf{x}_0$ dans ces variétés;

soient u et v leurs différentielles. D'autre part, tout $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$ peut s'écrire d'une seule manière $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ avec $\mathbf{h}_1 \in \mathrm{U}$ et $\mathbf{h}_2 \in \mathrm{V}$, et $\|\mathbf{h}_1\| \leq a\|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{h}_2\| \leq b\|\mathbf{h}\|$, où a et b sont des constantes indépendantes de $\mathbf{h}$; comme on a

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = [f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_1) - f(\mathbf{x}_0)] + [f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_2) - f(\mathbf{x}_0)] + \Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2),$$

on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, dès que $\mathbf{h}$ est assez petit

$$|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{h}_1) - v(\mathbf{h}_2)| \leq (a+b+abc\|\mathbf{h}\|)\varepsilon\|\mathbf{h}\|,$$

ce qui prouve que $u(\mathbf{h}_1) + v(\mathbf{h}_2)$ est la différentielle de f au point $\mathbf{x}_0$.

Si l'on suppose que $\dfrac{\Delta^3 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|.\|\mathbf{h}_3\|}$ reste borné lorsque les $\mathbf{h}_i$ sont assez petits, f est différentiable en *tout point* d'un voisinage de $\mathbf{x}_0$. En effet, $\dfrac{\Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|}$ est alors borné lorsque $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$ sont assez petits; comme, d'autre part, l'hypothèse signifie que

$$|\Delta^2 f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_3; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) - \Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)| \leq c\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|.\|\mathbf{h}_3\|$$

pour $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ assez petits (c constante), on en déduit que, pour $\mathbf{h}_3$ fixe et assez petit, $\dfrac{\Delta^2 f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_3; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|}$ est borné lorsque $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$ sont assez petits, ce qui prouve, d'après ce qui précède, que f est différentiable au point $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_3$.

Ces remarques vont nous permettre de démontrer l'énoncé qui généralise le théorème 1 :

THÉORÈME 4. — *Étant donnée une fonction f bornée au voisinage de $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$, pour qu'il existe une fonction multilinéaire symétrique $u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$ telle que le rapport*

$$\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|}$$

tende vers zéro lorsque les $\mathbf{h}_i$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que :

1° *La fonction f soit $n-2$ fois différentiable en tout point d'un voisinage* V *de $\mathbf{x}_0$, et $n-1$ fois différentiable au point $\mathbf{x}_0$;*

2° *Si l'on donne à $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-2}$ des valeurs fixes quelconques, la fonction $g(\mathbf{x}) = d^{n-2} f(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-2})$ soit absolument continue sur l'intersection de* V *et d'une droite quelconque rencontrant ce voisinage;*

3° *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U_ε de $\mathbf{x}_0$ tel que, pour tout système de valeurs de $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-2}$, et tout point $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}$ de U_ε tel que $g(\mathbf{x})$ ait une dérivée en ce point dans la direction définie par un vecteur $\mathbf{k}$ de norme 1, cette dérivée $v(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ satisfasse à l'inégalité*

$$|v(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-2}, \mathbf{k}) - u(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-2}, \mathbf{h}, \mathbf{k})| \leq \varepsilon\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\| \ldots \|\mathbf{h}_{n-2}\|.\|\mathbf{h}\|. \tag{8}$$

Supposons d'abord $n > 2$; alors on peut raisonner par récurrence sur n. En effet, comme $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|\ldots\|\mathbf{h}_n\|}$ reste borné au voisinage de $\mathbf{x}_0$, il en est de même de $\frac{\Delta^p f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_p)}{\|\mathbf{h}_1\|\ldots\|\mathbf{h}_p\|}$ pour $1 \leqq p < n$; en particulier le rapport correspondant à $p = 3$ reste borné, ce qui implique, comme nous l'avons vu, que f est différentiable dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$. Donnons à $\mathbf{h}_1$ une valeur fixe quelconque, et posons $f_1(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1)$; par hypothèse, lorsque les vecteurs $\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ sont assez petits, ainsi que le scalaire t, on a

$$|\Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - \Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - t u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon |t| .\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|.$$

Laissant fixes les $\mathbf{h}_i$ $(2 \leqq i \leqq n)$, faisons tendre t vers zéro dans cette inégalité, en remarquant que, dès que t est assez petit, on a

$$|\Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - \Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - t\,\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon' |t| .\|\mathbf{h}_1\|,$$

ε' tendant vers zéro avec t; il vient à la limite

$$|\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|$$

et, par suite, en posant $u_1(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \ldots, \mathbf{h}_n) = u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, le rapport

$$\frac{\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \ldots, \mathbf{h}_n) - u_1(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \ldots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_2\|.\|\mathbf{h}_3\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|}$$

tend vers zéro avec les $\mathbf{h}_i$ $(2 \leqq i \leqq n)$. On peut donc appliquer le théorème supposé démontré pour la différence $(n-1)^{\text{ième}}$ à la fonction f_1; cela donne bien pour f les trois conditions nécessaires de l'énoncé, à cela près que, dans la troisième condition, le voisinage U_ε dépend de la valeur donnée à $\mathbf{h}_1$; mais il suffit de prendre successivement pour $\mathbf{h}_1$ les m vecteurs d'une base de $\mathbf{R}^m$, et pour norme dans $\mathbf{R}^m$ la somme des valeurs absolues des composantes d'un vecteur sur cette base, pour voir aussitôt que l'inégalité (8) est vérifiée pour *tout* $\mathbf{h}_1$ dans le voisinage intersection des m voisinages U_ε correspondant aux m valeurs particulières précédentes de $\mathbf{h}_1$.

La nécessité des conditions de l'énoncé sera donc démontrée si on l'établit pour $n = 2$. Or nous avons déjà vu que dans ce cas f est différentiable au point $\mathbf{x}_0$. D'autre part, pour $\|\mathbf{k}\| = 1$, et les scalaires t, t' assez petits, on a

$$(9) \quad |f[\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + (t+t')\mathbf{k}] - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + t\mathbf{k}) - [f(\mathbf{x}_0 + t'\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}_0)] - t' u(\mathbf{h} + t\mathbf{k}, \mathbf{k})| \leqq \varepsilon |t'| .\|\mathbf{h} + t\mathbf{k}\|.$$

Comme $\frac{f(\mathbf{x}_0 + t'\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}_0)}{t'}$ tend vers $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{k})$ lorsque t' tend vers zéro, on voit que pour toute valeur de t assez petite, la fonction $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + t\mathbf{k})$ a ses

nombres dérivés bornés; elle est par suite absolument continue et a presque partout une dérivée; si l'on désigne cette dernière par $v(\mathbf{h}+t\mathbf{k}, \mathbf{k})$ pour les valeurs de t où elle existe, on a, en faisant tendre t' vers zéro dans (9),

$$|v(\mathbf{h}+t\mathbf{k}, \mathbf{k}) - df(\mathbf{x}_0; \mathbf{k}) - u(\mathbf{h}+t\mathbf{k}, \mathbf{k})| \leqq \varepsilon \|\mathbf{h}+t\mathbf{k}\|, \tag{10}$$

ce qui n'est autre que (8) où $\mathbf{h}$ est remplacé par $\mathbf{h}+t\mathbf{k}$.

Montrons maintenant que les conditions de l'énoncé sont *suffisantes*, et d'abord dans le cas $n=2$. Alors, si dans (10), on remplace t par z, l'inégalité obtenue a lieu presque partout pour $t \leqq z \leqq t+t'$ (lorsque $\mathbf{h}$, t et t' sont assez petits); en intégrant entre ces deux limites, il vient

$$\left| f[\mathbf{x}_0+\mathbf{h}+(t+t')\mathbf{k}] - f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}+t\mathbf{k}) - t'\,df(\mathbf{x}_0; \mathbf{k}) - t'u(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - \left(tt' + \frac{t'^2}{2}\right) u(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \right| \leqq \varepsilon\, t' \,(2\|\mathbf{h}+t\mathbf{k}\| + \|t'\mathbf{k}\|).$$

Mais on peut aussi appliquer cette dernière inégalité pour $\mathbf{h}=0$, $t=0$, d'où en retranchant

$$|f[\mathbf{x}_0+\mathbf{h}+(t+t')\mathbf{k}] - f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}+t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}_0+t'\mathbf{k}) + f(\mathbf{x}_0) - t'u(\mathbf{h}+t\mathbf{k}, \mathbf{k})| \leqq 2\varepsilon\, t' \,(\|\mathbf{h}+t\mathbf{k}\| + \|t'\mathbf{k}\|)$$

et, en y remplaçant $\mathbf{h}+t\mathbf{k}$ par $\mathbf{h}$, $t'\mathbf{k}$ par $\mathbf{k}$, on a

$$|\Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{k}) - u(\mathbf{h}, \mathbf{k})| \leqq 2\varepsilon(\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|).\|\mathbf{k}\|,$$

d'où la propriété lorsque $\|\mathbf{k}\| \leqq \|\mathbf{h}\|$; dans le cas contraire, on échange les rôles de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$, et l'on a encore le résultat cherché, puisque u a été supposée symétrique.

On peut maintenant achever le raisonnement par récurrence sur n; avec les notations antérieures, l'hypothèse est que, pour tout $\mathbf{h}_1$ assez petit,

$$|\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \ldots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|,$$

d'où, en remplaçant successivement $\mathbf{h}_2$ par $t\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2 + t\mathbf{h}_1$ dans cette inégalité, et retranchant les inégalités obtenues,

$$|\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\|(\|t\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2 + t\mathbf{h}_1\|)\|\mathbf{h}_3\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|.$$

Supposons $\mathbf{h}_1$ assez petit pour que dans cette inégalité on puisse faire varier t de 0 à 1; en remarquant que la dérivée de $\Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$ par rapport à t est égale à $\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, le théorème des accroissements finis donne l'inégalité

$$|\Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - \Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)| \leqq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\|(2\|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2\|)\|\mathbf{h}_3\| \ldots \|\mathbf{h}_n\|,$$

d'où la proposition lorsque l'on suppose $\|\mathbf{h}_1\| \leq \|\mathbf{h}_2\|$; dans le cas contraire, on intervertit les rôles de $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$, en utilisant la symétrie de la fonction u.

On notera que les conditions du théorème 4 entraînent que, dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$, $d^{n-1}f$ existe sauf aux points d'un ensemble K de mesure m-dimensionnelle nulle (1); en outre, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour tous les points n'appartenant pas à K et assez voisins de $\mathbf{x}_0$, on a, d'après (8),

$$(11)\quad |d^{n-1}f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h};\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_{n-1}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0;\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{n-1}) - u(\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{n-1},\mathbf{h})| \leq \varepsilon\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|\ldots\|\mathbf{h}_{n-1}\|.\|\mathbf{h}\|,$$

mais ces conditions n'entraînent pas réciproquement les conditions du théorème 4.

Corollaire. — *Soit f une fonction bornée dans un ensemble ouvert* A *de* $\mathbf{R}^m$. *Pour que, pour tout point* $\mathbf{x}$ *de* A, *il existe une fonction multilinéaire symétrique* $u_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_n)$ *telle que le rapport*

$$\frac{\Delta^n f(\mathbf{x};\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_n) - u_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|\ldots\|\mathbf{h}_n\|}$$

tende vers zéro lorsque les $\mathbf{h}_i$ *tendent vers zéro, il faut et il suffit que f soit n fois différentiable en tout point de* A.

En effet, d'après le théorème 4, f est $n-1$ fois différentiable en tout point de A; en outre l'inégalité (11) montre qu'en chaque point $\mathbf{x}_0$ de A, f est n fois différentiable. La réciproque est immédiate.

On généralise de même le théorème 2 et son corollaire aux fonctions définies dans un voisinage d'un point de $\mathbf{R}^m$; nous laissons au lecteur le détail des démonstrations, qui se font suivant les principes développés ci-dessus, et nous nous contentons d'indiquer les résultats. Pour que le rapport $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0;\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|\ldots\|\mathbf{h}_n\|}$ reste *borné* lorsque les $\mathbf{h}_i$ sont assez petits (f étant supposée bornée au voisinage de $\mathbf{x}_0$), il faut et il suffit que f satisfasse aux conditions 1° et 2° de l'énoncé du théorème 4, et en outre qu'il existe un voisinage U de $\mathbf{x}_0$ et un nombre fixe M tels que, pour tout système de valeurs $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_{n-2}$, et tout point $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}$ de U où $g(\mathbf{x})$ admette une dérivée $v(\mathbf{h},\mathbf{k})$ dans la direction définie par un vecteur $\mathbf{k}$ de norme 1, on ait

$$(12)\quad |v(\mathbf{h},\mathbf{k}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0;\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{n-2},\mathbf{k})| \leq M\|\mathbf{h}_1\|\ldots\|\mathbf{h}_{n-2}\|.\|\mathbf{h}\|.$$

Ces conditions entraînent encore l'existence de $d^{n-1}f$ aux points de U n'appartenant pas à un ensemble K de mesure m-dimensionnelle nulle;

(1) *Voir* par exemple R. Roger, *Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points* (*Acta Math.*, t. 69, 1938, p. 99-133).

en outre, on a en ces points

$$|d^{n-1}f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h};\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{n-1})-d^{n-1}f(\mathbf{x}_0;\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{n-1})|\leqq M\|\mathbf{h}_1\|\ldots\|\mathbf{h}_{n-1}\|.\|\mathbf{h}\|,$$

mais cette condition n'équivaut pas aux précédentes.

Enfin, pour que, pour tout point $\mathbf{x}$ appartenant à un ensemble ouvert A, le rapport $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x};\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|\ldots\|\mathbf{h}_n\|}$ reste borné (par un nombre dépendant de $\mathbf{x}$) lorsque les $\mathbf{h}_i$ tendent vers zéro, il faut et il suffit que f soit $n-1$ fois différentiable dans A, et que, pour tout point $\mathbf{x}$ de A, le rapport

$$\frac{d^{n-1}f(\mathbf{x}+\mathbf{h};\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_{n-1})-d^{n-1}f(\mathbf{x};\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_{n-1})}{\|\mathbf{h}_1\|.\|\mathbf{h}_2\|\ldots\|\mathbf{h}_{n-1}\|.\|\mathbf{h}\|}$$

reste borné (par un nombre dépendant de $\mathbf{x}$) lorsque $\mathbf{h}$ tend vers zéro et que les $\mathbf{h}_i$ prennent toutes les valeurs possibles $\neq 0$.

VARIATIONS

SUR

UN THÈME DE H. POINCARÉ

PAR M. FRANÇOIS CHÂTELET.

INTRODUCTION.

On appelle *problème diophantien* tout problème équivalent à la recherche des solutions en nombres entiers d'un système d'équations algébriques à coefficients entiers. H. Poincaré a consacré un mémoire (1) à l'un de ses problèmes : la recherche des « points rationnels » (à coordonnées rationnelles) sur une courbe rationnelle (c'est-à-dire sur une courbe définie par un système d'équations algébriques à coefficients rationnels). Il propose de ramener un tel problème au même problème sur une courbe aussi simple que possible. Pour cela, il répartit les courbes rationnelles en *classes de courbes équivalentes entre elles :* deux courbes rationnelles sont dites équivalentes s'il existe entre elles une correspondance birationnelle à coefficients rationnels. On peut déduire les points rationnels simples (2) situés sur une courbe de ceux qui sont situés sur une courbe équivalente. Il suffit alors de chercher les points rationnels sur la courbe la plus simple de chaque classe.

La méthode réussit particulièrement bien pour les courbes unicursales (ou de genre zéro). Poincaré a démontré à leur sujet deux théorèmes, dont l'essentiel avait déjà été obtenu, dans un autre langage, par Nœther, et qui ont été précisés par Hilbert et Hurwitz (3) :

Pour qu'une courbe unicursale et rationnelle, contienne des points rationnels simples, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à une droite (rationnelle).

(1) *Journal de Liouville*, 5e série, t. 7, 1901, p. 161-233.

(2) Les points multiples échappent à ces considérations; mais ce n'est guère important : sur une courbe, il n'y a qu'un nombre fini de points multiples qu'on peut obtenir et étudier séparément. *Voir* à ce sujet ma Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 18 janvier 1943.

(3) M. NOETHER, *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen* (*Math. Ann.*, Bd. 23, S. 311). — HILBERT et HURWITZ, *Über die diophantischen Gleichungen von Geschlecht Null* (*Acta mathematica*, Bd. 14, 1890-1891, S. 217-224).

Toute courbe unicursale et rationnelle est équivalente, soit à une droite, soit à une conique (rationnelle).

On peut préciser que la droite, ou la conique, du second théorème peut être obtenue, à partir de l'équation de la courbe donnée, par des opérations rationnelles en nombre fini.

Le second théorème ramène la classification des courbes unicursales à celle des coniques rationnelles. Or, des critères de Lagrange et de Gauss permettent de reconnaître si une conique rationnelle contient ou non des points rationnels. De plus, le premier théorème résout les problèmes diophantiens sur les courbes unicursales, puisqu'il est facile d'obtenir les points rationnels sur une droite rationnelle : ce sont ceux dont l'abscisse est rationnelle.

Le présent mémoire est consacré à une généralisation de cette théorie de Lagrange, Gauss, Nœther et Poincaré : on peut étendre, à certaines varjétés que j'appelle *variétés de Brauer* (4), l'essentiel des théorèmes de Nœther-Poincaré et donner des critères analogues à ceux de Lagrange-Gauss. Mais les méthodes que j'emploie sont essentiellement différentes de celles de Poincaré; elles ramènent les problèmes d'équivalence à des problèmes classiques de la théorie des Algèbres normales et simples ou *Algèbres de Brauer* (5). Pour cela, je mets en équation les problèmes d'équivalence suivant un *procédé galoisien*, c'est-à-dire en utilisant la notion de *conjugués* d'un nombre algébrique, convenablement adaptée aux êtres géométriques, et les *critères de Galois*, qui permettent de reconnaître si un nombre, ou un être géométrique, obtenu dans un corps de nombres algébriques, est rationnel ou non.

H. Hasse (6) a montré, dans un cas particulier, la corrélation entre certains problèmes d'équivalence et la théorie des Algèbres; mais il n'a pas atteint le cas général envisagé ici et ne semble avoir signalé qu'une corrélation formelle. D'autre part, je n'ai pas épuisé ici les possibilités de la méthode *galoisienne* au sujet de laquelle je prépare d'autres mémoires (7).

Pour éclaircir l'exposé des méthodes générales, j'en donne, dans un premier chapitre, l'application aux théorèmes classiques de Nœther-Poincaré. Cette application, relativement simple, ne comporte guère de difficultés arithmétiques (qui sont comprises dans les critères de Lagrange-Gauss); c'est pourquoi la démonstration peut en être faite sans le secours de la théorie des Algèbres.

---

(4) Cette locution est une abréviation commode de « *variété associée à une Algèbre de Brauer* ».

(5) L'expression *Algèbre de Brauer* n'est pas consacrée par les auteurs qui ont étudié cette notion; ils emploient la locution *Algèbre normale et simple*. Mais ils désignent sous le nom de *Groupe de Brauer sur un corps* le groupe formé par les Algèbres normales et simples sur ce corps. L'expression que j'emploie est donc une abréviation de *Algèbre contenue dans le groupe de Brauer sur le corps de base*. Toutes ces notions sont définies au paragraphe I du Chapitre III.

(6) *Elementar Beweis des Hauptsatzes über ternäre quadratische Formen* (*Journal de Crelle*, Bd. 172, 1935, S. 129-132).

(7) Voir mes Notes aux *Comptes rendus*, t. 206, 1938, p. 1532; 212, 1941, p. 320.

CHAPITRE I.

LES THÉORÈMES DE NŒTHER-POINCARÉ.

Une courbe algébrique plane (F) de genre zéro (ou unicursale), définie par une équation à coefficients rationnels, admet des *représentations* unicursales propres à coefficients algébriques. Je ne me préoccupe pas ici de la manière dont on peut déterminer une telle représentation. J'utilise les coordonnées homogènes x, y, z du plan et je représente le paramètre par le quotient de deux variables homogènes u et v. Une représentation propre $(\mathcal{F})$ de (F) est définie par un système de relations

$$\frac{x}{\xi_1(u, v)} = \frac{y}{\xi_2(u, v)} = \frac{z}{\xi_3(u, v)}; \qquad \frac{u}{\eta_1(x, y, z)} = \frac{v}{\eta_2(x, y, z)};$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois polynomes homogènes en u et v de même degré et premiers entre eux; η_1 et η_2 sont deux polynomes homogènes en x, y, z de même degré et premiers entre eux; tous ces polynomes ont leurs coefficients algébriques. Ces relations définissent aussi une *correspondance birationnelle*, que je désigne par le même symbole $(\mathcal{F})$, entre le point de coordonnées homogènes x, y, z sur (F) et le point de coordonnées homogènes o, u, v sur Oy. L'énoncé du second théorème de Nœther-Poincaré est ainsi équivalent à :

S'il existe une correspondance birationnelle à coefficients algébriques entre une courbe (F) (définie par une équation algébrique irréductible à coefficients rationnels) *et l'axe* Oy, *il existe une correspondance birationnelle à coefficients rationnels entre* (F) *et, soit une droite, soit une conique* (définie par une équation à coefficients rationnels).

En outre, le premier théorème de Nœther-Poincaré, précise que :

S'il existe une correspondance birationnelle, à coefficients rationnels, entre (F) *et* Oy, *il existe une infinité de points rationnels sur* (F); *pour qu'il existe une telle correspondance, il suffit qu'il y ait un point rationnel simple sur* (F).

1. — Système d'équivalence entre deux courbes unicursales.

Je considère deux courbes (F) et (F′) unicursales et rationnelles et je détermine pour chacune d'elles une représentation propre à coefficients algébriques que je désigne par les symboles

$(\mathcal{F})$: $\quad (o, u, v)$ sur Oy $\rightarrow$ (x, y, z) sur (F).

$(\mathcal{F}')$: $\quad (o, u', v')$ sur Oy $\rightarrow$ (x', y', z') sur (F′).

J'utilise un *corps normal* K de nombres algébriques, contenant les coefficients de $(\mathcal{F})$ et ceux de $(\mathcal{F}')$; je choisis un élément primitif Θ dans K et je désigne par

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_{N-1}, \quad \Theta_N = \Theta,$$

les conjugués (absolus) de Θ; N est le degré du corps K. Je puis exprimer un nombre a de K en fonction rationnelle, à coefficients rationnels, de Θ; suivant les conventions habituelles, j'appelle $i^{\text{ième}}$ conjugué de a et je désigne par $a^{(i)}$ le nombre de K obtenu en remplaçant Θ par Θ_i dans cette fonction. Plus généralement, si un système quelconque $(\mathcal{R})$ de polynomes [par exemple le système qui définit $(\mathcal{F})$: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2$] a ses coefficients dans K, j'appelle $i^{\text{ième}}$ conjugué et je désigne par $(\mathcal{R})^{(i)}$ le système obtenu en remplaçant chaque coefficient par son $i^{\text{ième}}$ conjugué sans modifier aucune des inconnues (x, y, z, u, v dans l'exemple cité).

Ces conventions étant acquises, je vais démontrer la proposition fondamentale suivante :

(E). *Les correspondances birationnelles, à coefficients rationnels, entre* (F') *et* (F)

$$(\mathcal{R}) : \qquad (x', y', z') \text{ sur } (F') \rightarrow (x, y, z) \text{ sur } (F),$$

peuvent être obtenues au moyen de la formule

$$(E, 1) \qquad (\mathcal{R}) = (\mathcal{F}')^{-1} \times (\mathcal{L}) \times (\mathcal{F}).$$

Dans cette formule, $(\mathcal{L})$ *est une homographie sur* Oy *à coefficients dans* K, *non dégénérée, vérifiant le système d'équations en* $(\mathcal{L})$

$$(E, 2) \qquad (\mathcal{L})^{(i)} \times (\mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}'_i) \times (\mathcal{L}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

où les coefficients $(\mathcal{A}_i)$ *et* $(\mathcal{A}'_i)$ *sont les homographies non dégénérées sur* Oy, *à coefficients dans* K, *définies par les relations*

$$(\mathcal{A}_i) = (\mathcal{F})^{(i)} \times (\mathcal{F})^{-1}, \qquad (\mathcal{A}'_i) = (\mathcal{F}')^{(i)} \times (\mathcal{F}')^{-1}.$$

La formule (E, 1) *établit une correspondance biunivoque entre les correspondances* $(\mathcal{R})$ *et les solutions* $(\mathcal{L})$ *du système* (E, 2).

En particulier : **pour que** (F) **et** (F') **soient équivalentes entre elles, il faut et il suffit qu'il existe au moins une homographie sur** Oy, **non dégénérée, à coefficients dans** K, **vérifiant le système** (E, 2) **d'équations en** $(\mathcal{L})$.

S'il existe entre (F') et (F) une correspondance birationnelle

$$(\mathcal{R}) : \qquad (x', y', z') \text{ sur } (F') \rightarrow (x, y, z) \text{ sur } (F),$$

on peut en déduire une correspondance birationnelle $(\mathcal{L})$ sur Oy

$$(\mathcal{L}) = (\mathcal{F}') \times (\mathcal{R}) \times (\mathcal{F})^{-1} : \quad (o, u', v') \text{ sur } Oy \rightarrow (o, u, v) \text{ sur } Oy.$$

Une telle correspondance est une homographie non dégénérée sur Oy. Réciproquement, à partir d'une homographie $(\mathcal{L})$ non dégénérée sur Oy, la formule (E, 1) (équivalente à la précédente) définit une correspondance $(\mathcal{R})$ qui est birationnelle, car

$$(\mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{F})^{-1} \times (\mathcal{L})^{-1} \times (\mathcal{F}').$$

Si les coefficients de $(\mathcal{R})$ sont rationnels, ceux de $(\mathcal{L})$ sont dans K; si les coefficients de $(\mathcal{L})$ sont dans K, ceux de $(\mathcal{R})$ et ceux de $(\mathcal{R})^{-1}$ y sont aussi. Reste donc à chercher la condition pour qu'une telle correspondance $(\mathcal{R})$, définie par des relations à coefficients dans K, puisse aussi être définie par des relations à coefficients rationnels.

Pour cela, je remarque que, (F) et (F') ayant leurs coefficients rationnels, les conjugués d'une correspondance birationnelle (à coefficients dans K) entre (F') et (F) sont aussi des correspondances birationnelles entre les mêmes courbes. Et j'utilise la propriété :

(G). *Pour qu'une correspondance* $(\mathcal{R})$ (à coefficients dans K) *entre* (F') *et* (F) *puisse être définie par des formules à coefficients rationnels, il faut et il suffit que ses* N *conjuguées soient des correspondances entre* (F') *et* (F) *identiques à* $(\mathcal{R})$

$$(\mathcal{R})^{(i)} = (\mathcal{R}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

La condition est manifestement nécessaire; il est aisé de montrer qu'elle est suffisante. Je n'insiste pas sur ce point; j'en ai donné une exposition détaillée et générale dans le chapitre sur les critères de Galois, dans un mémoire sur la **Géométrie galoisienne.**

Cette condition (G), appliquée au produit (E, 1), donne :

$$(\mathcal{F}')^{-1} \times (\mathcal{L}) \times (\mathcal{F}) = (\mathcal{F}'^{(i)})^{-1} \times (\mathcal{L})^{(i)} \times (\mathcal{F})^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

ce qui est équivalent au système (E, 2). Enfin les produits

$$(\mathcal{A}_i) = (\mathcal{F})^{(i)} \times (\mathcal{F})^{-1}, \qquad (\mathcal{A}'_i) = (\mathcal{F}')^{(i)} \times (\mathcal{F}')^{-1}$$

sont des correspondances birationnelles sur Oy, donc des homographies *non dégénérées* sur cet axe.

Le système (E, 2) est appelé, par la suite, **système d'équivalence entre** (F') **et** (F), par abréviation de « système des équations d'équivalence entre (F') et (F) déduit des représentations propres $(\mathcal{F}')$ et $(\mathcal{F})$ dans le corps K ».

Il est utile de former les conjuguées de chaque équation du système (E, 2) : ces nouvelles équations doivent être des conséquences de ce système. En précisant le $j^{\text{ième}}$ conjugué de Θ_i (qui est aussi un conjugué de Θ et correspond à un produit dans le groupe de Galois de K), je puis calculer les $j^{\text{ièmes}}$ conjuguées des correspondances $(\mathcal{A}_i)$ et $(\mathcal{A}'_i)$; j'obtiens :

(E, 3) $$(\mathcal{A}_i)^{(j)} = (\mathcal{A}_k) \times (\mathcal{A}_j)^{-1}, \qquad \text{si} \quad \Theta_i^{(j)} = \Theta_k.$$

En effet,

$$(\mathcal{A}_i)^{(j)} = [(\mathcal{F})^{(i)} \times (\mathcal{F})^{-1}]^{(j)} = (\mathcal{F})^{(k)} \times (\mathcal{F}^{(j)})^{-1}$$
$$= (\mathcal{F})^{(k)} \times (\mathcal{F})^{-1} \times [(\mathcal{F})^{(j)} \times (\mathcal{F})^{-1}]^{-1} = (\mathcal{A}_k) \times (\mathcal{A}_j)^{-1}.$$

La $j^{\text{ième}}$ conjuguée de la $i^{\text{ième}}$ équation du système (E, 2) est donc

$$(\mathcal{L})^{(k)} \times (\mathcal{A}_k) \times (\mathcal{A}_j)^{-1} = (\mathcal{A}'_k) \times (\mathcal{A}_j)^{-1} \times (\mathcal{L})^{(j)};$$

c'est une combinaison simple des équations de rang k et j du système (E, 2).

De ce calcul, je retiens les relations (E, 3) qui montrent que l'ensemble des produits $(\mathcal{A}_i)$ n'est pas un ensemble quelconque de N homographies sur Oy; elles jouent d'ailleurs un rôle important dans la suite. Je les désigne sous le nom de *relations de compatibilité du système* (E, 2).

II. — Points rationnels et homographies dégénérées.

J'ai introduit, au paragraphe précédent, les systèmes d'équivalence pour obtenir les correspondances birationnelles entre deux courbes (F') et (F) (unicursales et rationnelles); je montre maintenant qu'un tel système permet aussi la recherche des points rationnels sur une de ces courbes (F).

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent permet de généraliser la propriété (E) aux correspondances simplement rationnelles :

(E'). *Les correspondances simplement rationnelles, à coefficients rationnels, entre* (F') *et* (F)

$$(\mathcal{C}) : \qquad (x', y', z') \text{ sur } (F') \rightarrow (x, y, z) \text{ sur } (F),$$

peuvent être obtenues au moyen de la formule

$$(E', 1) \qquad (\mathcal{C}) = (\mathcal{F}')^{-1} \times (\mathcal{X}) \times (\mathcal{F}),$$

à l'exception peut-être de certaines correspondances dont chacune transforme (F') en un ensemble fini de *points multiples* sur (F). Dans cette formule, $(\mathcal{X})$ est une correspondance simplement rationnelle sur Oy, à coefficients dans K, vérifiant le système d'équations en $(\mathcal{X})$:

$$(E', 2) \qquad (\mathcal{X})^{(i)} \times (\mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}'_i) \times (\mathcal{X}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

où les $(\mathcal{A}_i)$ et les $(\mathcal{A}_i)$ sont les mêmes homographies non dégénérées sur Oy que dans le système (E, 2).

Je ne détaille pas la démonstration de cette propriété que j'ai développée sous une forme plus générale dans la *Géométrie galoisienne*. J'indique seulement que les cas d'exceptions proviennent du fait suivant : il peut exister des correspondances $(\mathcal{C})$, transformant (F') en un nombre fini de points multiples sur (F), telles que le produit $(\mathcal{C}) \times (\mathcal{F})^{-1}$ transforme (F') en un *ensemble vide*.

J'appelle ce nouveau système (E', 2) (concernant les solutions dégénérées) **système étendu d'équivalence entre** (F') **et** (F).

D'un cas particulier de la propriété précédente, je déduis le résultat suivant :

Les points rationnels simples ([8]) *sur* (F) *peuvent être déterminés par les solutions homographiques dégénérées du système d'équations* (E', 2) (c'est-à-dire par les homographies dégénérées sur Oy, à coefficients dans K, qui vérifient ce système).

En effet, un point rationnel *simple* M sur (F) détermine une correspondance simplement rationnelle dégénérée entre (F') et (F), à coefficients rationnels

$$(\mathfrak{S}) : \qquad \text{tout point } (x', y', z') \text{ sur } (F') \rightarrow \text{le point M};$$

réciproquement, si une correspondance simplement rationnelle, à coefficients rationnels, transforme la courbe (F') en un seul point, ce dernier est rationnel. De plus, une telle correspondance se déduit, au moyen de la formule (E', 1), d'une solution $(\mathfrak{T})$ du système (E', 2) qui transforme l'axe Oy en un seul point de cet axe, donc est une homographie dégénérée sur Oy.

Ce théorème montre que l'existence d'une solution homographique dégénérée pour le système (E', 2) est indépendante du choix de (F'). On constate d'ailleurs directement qu'un changement du coefficient $(\mathfrak{A}'_i)$ ne modifie pas les solutions homographiques dégénérées de ce système, car en multipliant à gauche une homographie dégénérée sur Oy par une homographie non dégénérée sur cet axe on ne modifie pas la première.

III. — Le premier théorème.

Je démontre maintenant le théorème suivant qu'il suffit de comparer à celui du paragraphe précédent pour en déduire le premier théorème de Nœther-Poincaré.

Si un système étendu d'équivalence entre (F') *et* (F) *admet une solution homographique dégénérée*, (F) *est équivalente à* Oy.

La remarque de la fin du paragraphe précédent montre qu'il suffit de prouver ce théorème pour un choix arbitraire de (F'); il est donc équivalent à : *si un système étendu d'équivalence entre* Oy *et* (F) *admet des solutions homographiques dégénérées, il admet aussi des solutions homographiques non dégénérées.* C'est sous cette forme que je vais le démontrer; de plus je puis faire un choix particulier des correspondances $(\mathfrak{T}')$ et $(\mathfrak{T})$, car un changement de ces correspon-

([8]) Je ne fais pas de distinction ici entre les points à distance finie ou infinie du plan (projectif) et j'appelle *point rationnel*, ou point dans K, sur (F) un point de cette courbe dont les coordonnées homogènes ont des rapports deux à deux rationnels, ou dans K.

dances ne modifie ni l'existence d'une solution homographique dégénérée, ni celle d'une solution homographique non dégénérée.

Je choisis pour représentation $(\mathcal{F}')$ de Oy la correspondance identique sur cet axe; les homographies $(\mathfrak{A}_i)$ sont donc toutes identiques à l'unité. Je considère d'autre part, une représentation propre $(\mathcal{F}_1)$ de (F) et un corps algébrique normal K contenant les coefficients de $(\mathcal{F}_1)$. Je suppose que le système étendu d'équivalence, déduit des représentations $(\mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{F}')$, ait une solution homographique dégénérée $(\mathfrak{X}_1)$. L'homographie $(\mathfrak{X}_1)$ transforme l'axe Oy en un seul point N_1 dans K; je sais construire une homographie $(\mathfrak{L}_1)$ non dégénérée sur Oy, à coefficients dans K, qui transforme le point à l'infini de Oy en N_1. Je choisis pour correspondance $(\mathcal{F})$ le produit $(\mathfrak{L}_1)\times(\mathcal{F}_1)$ et je forme le système étendu d'équivalence :

$$(E', 2) \qquad (\mathfrak{X})^{(i)}\times(\mathfrak{A}_i)=(\mathfrak{X}) \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

déduit des correspondances $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ dans le corps K. Ce système en $(\mathfrak{X})$ admet pour solution l'homographie dégénérée

$$(\mathfrak{X}_1)\times(\mathfrak{L}_1)^{-1} : \text{ tout point } (o, u, v) \text{ sur } Oy \rightarrow \text{ le point à l'}\infty \text{ sur } Oy.$$

Ceci n'est possible que si chacune des correspondances $(\mathfrak{A}_i)$ conserve le point à l'∞ sur Oy, donc si ces homographies sont des transformations *linéaires* sur Oy.

Pour simplifier légèrement les notations, je définis les transformations linéaires sur Oy en coordonnées *non homogènes* $t=u:v$,

$$(\mathfrak{A}) : \qquad \{t'=at+b\}.$$

Je définis, suivant l'habitude, la somme de telles transformations par l'addition de leurs coefficients :

$$\sum_s \{t'=a_s t+b_s\} = \left\{t'=\left(\sum_s a_s\right)t+\sum_s b_s\right\}.$$

Le produit des transformations linéaires est une opération distributive par rapport à leur somme ainsi définie.

A partir des produits $(\mathfrak{A}_i)$, qui sont des transformations linéaires,

$$(\mathfrak{A}_i) : \qquad \{t'=a_i t+b_i\},$$

et d'une transformation linéaire $(\mathfrak{L})$ sur Oy quelconque, à coefficients dans K

$$(\mathfrak{L}) : \qquad \{t'=lt+m\},$$

je forme la somme

$$(\mathfrak{X})=\sum_i (\mathfrak{L})^{(i)}\times(\mathfrak{A}_i) \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } N).$$

C'est une solution du système (E', 2); en effet, des relations de compatibilité (E, 3) et de la distributivité des produits de transformations linéaires par rapport à leur somme, il résulte que :

$$(\mathfrak{L})^{(j)} = \sum_i (\mathfrak{L})^{(k)} \times (\mathfrak{A}_i)^{(j)} = \sum_k (\mathfrak{L})^{(k)} \times (\mathfrak{A}_k) \times (\mathfrak{A}_j)^{-1} = (\mathfrak{L}) \times (\mathfrak{A}_j)^{-1}$$

(pour tout j de 1 à N).

Je vais montrer que pour un choix convenable de $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{L})$ n'est pas dégénérée, c'est-à-dire que le coefficient de t dans cette transformation n'est pas nul. Ce coefficient est

$$p = \sum_i l^{(i)} a_i;$$

en prenant successivement pour l les N premières puissances de Θ, j'obtiens N valeurs de p qui ne peuvent être toutes nulles : ces N valeurs se présentent comme N formes linéaires des N nombres $a_1, a_2, \ldots, a_N$; d'une part, le déterminant de ces formes $|\Theta_i^s|$ n'est pas nul, puisqu'il est égal au discriminant dans K d'un élément primitif Θ de ce corps; d'autre part, aucun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_N$ n'est nul, puisque aucune des transformations $(\mathfrak{A}_i)$ n'est dégénérée. Donc il existe une puissance Θ^r de Θ pour laquelle la somme

$$(\mathfrak{L}) = \sum_i (\mathfrak{L})^{(i)} \times (\mathfrak{A}_i) \qquad \text{avec} \quad (\mathfrak{L}) = \{ t' = \Theta^r t \},$$

est une solution homographique non dégénérée de (E', 2) et le théorème est démontré.

IV. — Introduction de relations matricielles.

J'ai obtenu, au paragraphe précédent, une solution du système d'équivalence en *additionnant* des transformations linéaires. Cette notion d'addition ne s'étend pas aux homographies sur Oy, mais seulement aux matrices, ou tableaux de coefficients, qui les représentent. Aussi vais-je utiliser ces matrices; je rappelle d'abord les relations qui existent entre elles et les homographies sur Oy.

Une matrice carrée L régulière (à déterminant non nul), du deuxième ordre, à termes dans K, définit une homographie $(\mathfrak{L})$ sur Oy, à coefficients dans K et non dégénérée; réciproquement, une telle homographie $(\mathfrak{L})$ peut être représentée par une matrice L ayant les propriétés précédentes, *définie au produit près par un scalaire* λ *de* K. J'utilise de nouveau les coordonnées *homogènes*; l'homographie

$$(\mathfrak{L}) \qquad \left\{ \frac{u'}{au + bv} = \frac{v'}{cu + dv} \right\},$$

est représentée par la matrice

$$L = \lambda \times \begin{Vmatrix} a & c \\ b & d \end{Vmatrix}.$$

Une matrice carrée irrégulière du deuxième ordre définit une homographie dégénérée sur Oy et réciproquement une homographie dégénérée sur Oy, à coefficients dans K, peut être représentée par une matrice irrégulière, à termes dans K, définie au produit près, à gauche, par une matrice régulière arbitraire à termes dans K.

A la multiplication des matrices correspond la multiplication des homographies; je puis donc exprimer toute relation entre homographies sur Oy par une relation entre les matrices qui les représentent, compte tenu de l'indétermination relative de ces matrices. Notamment, le système d'équivalence :

$$(E, 2) \qquad (\mathcal{L})^{(i)} \times (\mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}'_i) \times (\mathcal{L}) \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

est équivalent au système d'équations en L et λ_i :

$$(E.M, 2) \qquad L^{(i)} \times A_i = \lambda_i \times A'_i \times L \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

A_i est une matrice à termes dans K représentant $(\mathcal{A}_i)$, A'_i une matrice à termes dans K représentant $(\mathcal{A}'_i)$; L est une matrice représentant $(\mathcal{L})$, donc une matrice régulière à termes dans K arbitraire; λ_i est un scalaire arbitraire de K.

J'appelle, par la suite, **ensemble de matrices associé à la courbe (F)**, l'ensemble des N matrices A_i représentant les homographies

$$(\mathcal{A}_i) = (\mathcal{F})^{(i)} \times (\mathcal{F})^{-1}.$$

Cet ensemble vérifie les **relations de compatibilité matricielles** :

$$(C.M.) \qquad A_i^{(j)} = A_k \times A_j^{-1} \times a_{i,j} \qquad \text{si} \quad \Theta_i^{(j)} = \Theta_k,$$

où $a_{i,j}$ est un scalaire de K, ces relations sont équivalentes aux relations de compatibilité (E, 3) vérifiées par les homographies $(\mathcal{A}_i)$. J'appelle les N^2 nombres $a_{i,j}$ **ensemble de scalaires associé à la courbe (F)**.

Si deux courbes (F) et (F') (unicursales et rationnelles) sont associées au même ensemble de matrices A_i, elles sont équivalentes; les coefficients $(\mathcal{A}_i)$ et $(\mathcal{A}'_i)$ du système d'équivalence entre (F') et (F) correspondant

$$(\mathcal{L})^{(i)} \times (\mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}'_i) \times (\mathcal{L}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

sont respectivement identiques et ce système admet au moins une solution non dégénérée, la correspondance identique sur Oy.

Je vais établir le théorème plus général :

Si deux courbes unicursales et rationnelles sont associées au même ensemble de scalaires, elles sont équivalentes.

Je considère deux telles courbes (F) et (F′) associées respectivement aux ensembles de matrices A_i et A'_i tels que

$$A_i^{(j)} = A_k \times A_j^{-1} \times a_{i,j}, \qquad A_i'^{(j)} = A'_k \times A_j'^{-1} \times a_{i,j}.$$

A partir d'une matrice carrée V, d'ordre 2, à termes dans K, arbitraire, je forme la somme

$$P = \sum_i A_i'^{-1} \times V^{(i)} \times A_i \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } N).$$

Cette matrice P représente une homographie $(\mathfrak{T})$ qui vérifie le système étendu d'équivalence

$$(E', 2) \qquad (\mathfrak{T})^{(i)} \times (\mathfrak{A}_i) = (\mathfrak{A}'_i) \times (\mathfrak{T}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Car les relations (C.M.) montrent que

$$P^{(j)} = \sum_i [(A_i'^{(j)})^{-1} \times V^{(k)} \times A_i^{(j)}] = \sum_k [a_{i,j}^{-1} \times A'_j \times A_k'^{-1} \times V^{(k)} \times A_k \times A_j^{-1} \times a_{i,j}];$$

j'en déduis, en utilisant les faits qu'un scalaire est permutable avec toute matrice et que le produit des matrices est distributif par rapport à leur somme :

$$P^{(j)} = A'_j \times \left[\sum_k (A_k'^{-1} \times V^{(k)} \times A_k) \right] \times A_j^{-1} = A'_j \times P \times A_j^{-1};$$

d'où résulte à fortiori la $j^{\text{ième}}$ relation du système (E′, 2).

Si P est régulière, l'homographie $(\mathfrak{T})$ n'est pas dégénérée et les courbes (F) et (F′) sont équivalentes entre elles. Si P est irrégulière, (F) est équivalente à Oy, d'après le théorème du paragraphe III. Mais je puis aussi former de la même façon une matrice P′ après avoir interverti le rôle de (F) et de (F′); j'en déduis que : ou bien (F) et (F′) sont équivalentes entre elles, ou bien (F′) est équivalente à Oy. Comme l'équivalence de (F) et de (F′) à Oy entraine leur équivalence entre elles, la proposition est démontrée.

Je fais remarquer que toute homographie $(\mathfrak{T})$ (dégénérée ou non) qui vérifie le système (E′, 2) (s'il en existe) peut être représentée par une somme de la forme

$$P = \sum_i A_i'^{-1} \times V^{(i)} \times A_i.$$

En effet, si V_1 est une matrice, à termes dans K, arbitraire, représentant cette homographie, chacun des produits $A_i'^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i$ représente aussi cette homographie, en vertu des relations (E′, 2). Donc la somme P_1 de ces produits représente encore $(\mathfrak{T})$.

En particulier toute correspondance birationnelle entre la courbe (F) et elle-même peut être représentée par une somme de la forme

$$P = \sum_i A_i^{-1} \times V^{(i)} \times A_i.$$

V. — Corps quadratiques de représentation.

J'appelle **corps de représentation d'une courbe** (F) (unicursale et rationnelle) un corps de nombres algébriques fini K_1 tel que (F) admette une représentation unicursale propre à coefficients dans K_1.

Pour toute courbe unicursale et rationnelle, il existe au moins un corps quadratique de représentation.

Pour reconnaître si un corps K_1 est corps de représentation de (F), je puis choisir pour corps K une extension de K_1, former un système d'équivalence entre O_y et (F), à coefficients dans K,

$$(E, 2) \qquad (\mathcal{L})^{(i)} \times (\mathcal{A}_i) = (\mathcal{L}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

et ne conserver de ce système que les équations qui correspondent aux conjugués relatifs Θ_i, de Θ *par rapport à* K_1 et non à tous les conjugués *absolus* de Θ.

J'obtiens ainsi un système d'équivalence *relative dans* K_1 entre O_y et (F) et je puis prouver que :

Pour que K_1 *soit corps de représentation de* (F), *il faut et il suffit que le système* (E, 2) *d'équivalence relative dans* K_1 *ait au moins une solution.*

En effet, les correspondances birationnelles entre O_y et (F), à coefficients dans K_1, se déduisent des solutions du système d'équivalence relative dans K_1 (E, 2) au moyen de la formule :

$$(E, 1) \qquad (\mathcal{R}) = (\mathcal{F}')^{-1} \times (\mathcal{L}) \times (\mathcal{F}).$$

Je n'insiste pas sur la démonstration complète de ce fait, elle est analogue à celle du paragraphe I; j'en ai donné un exposé détaillé dans la *Géométrie galoisienne*.

Enfin la propriété du paragraphe III s'étend aux systèmes d'équivalence relative dans K_1; cette extension qui est assez évidente est aussi démontrée dans la *Géométrie galoisienne*.

Si un système d'équivalence relative dans K_1 *entre deux courbes* (unicursales et rationnelles) (F') *et* (F) *admet des solutions homographiques dégénérées, le corps* K_1 *est corps de représentation de* (F).

Je vais maintenant construire un corps quadratique K_1 vérifiant cette dernière propriété pour deux courbes identiques entre elles [ce qui est utile pour

obtenir toutes les correspondances birationnelles à coefficients rationnels sur (F)].

J'ai dit que toute correspondance birationnelle à coefficients rationnels entre la courbe (F) et elle-même peut être représentée par une somme de la forme

$$P = \sum_i A_i^{-1} \times V^{(i)} \times A_i,$$

qui vérifie le système particulier d'équations matricielles en P

$$P^{(i)} \times A_i = A_i \times P \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{M}$$

Parmi ces correspondances se trouve la correspondance identique sur Oy, représentée par une matrice scalaire obtenue notamment en prenant pour V une matrice scalaire.

Mais il existe aussi d'autres correspondances représentées par des matrices P non scalaires. Je remplace V successivement par les produits d'une matrice arbitraire V_1 et des N premières puissances de Θ; j'obtiens ainsi N matrices :

$$P_1 = \sum_i [A_i^{-1} \times (\Theta \times V_1)^{(i)} \times A_i] = \sum_i [\Theta_i \times A_i^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i],$$

$$P_2 = \sum_i [A_i^{-1} \times (\Theta^2 \times V_1)^{(i)} \times A_i] = \sum_i [\Theta_i^2 \times A_i^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_N = \sum_i [A_i^{-1} \times (\Theta^N \times V_1)^{(i)} \times A_i] = \sum_i [\Theta_i^N \times A_i^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i],$$

qui toutes vérifient le système de relations (M). Ces N matrices sont des formes linéaires à coefficients scalaires (dans K) des N produits $A_i^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i$; le déterminant de ces N formes $|\Theta_i^s|$ est le discriminant de Θ dans K, donc il n'est pas nul. Par suite, je puis exprimer inversement chacun des N produits $A_i^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i$ en fonction linéaire à coefficients scalaires (dans K) de $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Si $P_1, P_2, \ldots, P_N$ sont tous scalaires, il résulte des faits précédents que chaque produit $A_i^{-1} \times V_1^{(i)} \times A_i$, et notamment $V_1 = A_N^{-1} \times V_1^{(N)} \times A_N$, est aussi un scalaire. Il suffit donc de choisir pour V_1 une matrice non scalaire pour obtenir parmi les N matrices $P_1, P_2, \ldots, P_N$ au moins une solution non scalaire du système (M).

Je considère une telle matrice P non scalaire; si P est irrégulière, (F) est équivalente à Oy et tous les corps de nombres algébriques sont corps de représentation de (F). Si P est régulière, elle vérifie une équation déterminée du deuxième degré à coefficients scalaires de K (équation en λ ou équation caractéristique de cette matrice) :

$$f(P) = P^2 - (a+d)P + ad - bc = 0,$$

pour la matrice

$$P=\left\| \begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix} \right\| \qquad (bc\neq 0 \text{ ou } a\neq d, \text{ matrice non scalaire}).$$

Mais les relations (M) montrent que les conjugués de P vérifient aussi cette équation, car

$$f(P^{(i)})=f(A_i^{-1}\times P\times A_i)=A_i^{-1}\times f(P)\times A_i=0.$$

Donc les polynômes caractéristiques des matrices $P^{(i)}$, polynomes qui ne sont autres que les conjugués de $f(x)$, sont tous identiques à $f(x)$; il en résulte que les coefficients de $f(x)$ sont nécessairement rationnels.

Les zéros ω et ω' du polynome $f(x)$ à coefficients rationnels définissent un corps algébrique K_1 qui est soit l'ensemble de tous les nombres rationnels, soit un corps quadratique. Je change au besoin le choix du corps K de façon qu'il contienne le corps K_1 et je montre que K_1 *est corps de représentation de* (F). En effet, la matrice

$$P_0=\|P-\omega\|=\left\| \begin{matrix} a-\omega & c \\ b & d-\omega \end{matrix} \right\|,$$

est une matrice irrégulière solution du système relatif (M) dans K_1. D'une part, le déterminant de cette matrice est $f(\omega)$, donc est nul. D'autre part, P vérifie le système absolu (M), donc à fortiori le système relatif; en désignant par $\Theta_{i'}$ les conjugués *relatifs* de Θ par rapport à K_1, j'obtiens

$$P_0^{(i')}\times A_{i'}=\|P^{(i')}\times A_{i'}-\omega\times A_{i'}\|=\|A_{i'}\times P-A_{i'}\times\omega\|=A_{i'}\times P_0,$$

puisque les conjugués relatifs $\omega_{i'}$ sont égaux à ω et que ω est permutable avec toute matrice.

Le théorème est ainsi démontré.

VI. — Le second théorème.

Puisque j'ai obtenu un corps quadratique de représentation de (F), je puis former dans un tel corps un système d'équivalence absolue entre Oy et (F). De ce système, je vais déduire une conique rationnelle (C) et établir qu'elle est équivalente à (F). Ce qui démontrera le second théorème de Nœther-Poincaré.

Je suppose donc que le corps K est un corps quadratique et je choisis dans ce corps un nombre primitif Θ dont le carré soit un nombre rationnel b. Le nombre Θ a seulement deux conjugués absolus $\Theta_1=-\Theta$ et $\Theta_2=\Theta$. Le système de matrices associé à (F) comprend deux matrices dont la seconde A_2 peut être choisie identique à l'unité. Les relations de compatibilité matricielles sont

$$A_1^{(1)}=A_2\times A_1^{-1}\times a_{1.1}, \qquad A_2^{(1)}=A_1\times A_1^{-1}\times a_{2.1},$$
$$A_1^{(2)}=A_1\times A_2^{-1}\times a_{1.2}, \qquad A_2^{(2)}=A_2\times A_2^{-1}\times a_{2.2};$$

elles se réduisent à

$$a_{1,2}=a_{2,1}=a_{2,2}=1, \qquad a_{1,1}=A_1^{(1)}\times A_1=A_1\times A_1^{(1)}.$$

Le nombre $a_{1,1}$ est égal à son conjugué, c'est un nombre rationnel que je désigne encore par a.

Le système d'équivalence entre Oy et (F) comprend deux relations dont la seconde est identiquement vérifiée; la première est

$$(\mathcal{F})^{(1)}\times(\mathfrak{A}_1)=(\mathcal{F});$$

qui est équivalente à l'équation matricielle en L et λ

$$L^{(1)}\times A_1=\lambda\times L,$$

où λ est un scalaire de K.

Je décompose L, A_1 et λ en fonctions linéaires à coefficients rationnels de Θ

$$L=\overline{L}+\Theta\overline{L'}, \qquad A_1=\overline{A}_1+\Theta\overline{A'_1}, \qquad \lambda=\overline{\lambda}+\Theta\overline{\lambda'};$$

la relation précédente est équivalente à l'équation en $\overline{L}$, $\overline{L'}$, $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda'}$:

$$(\overline{L}-\Theta\overline{L'})\times(\overline{A}_1+\Theta\overline{A'_1})=(\overline{\lambda}+\Theta\overline{\lambda'})\times(\overline{L}+\Theta\overline{L'}),$$

ou encore au système à coefficients rationnels

$$\overline{L}\times(\overline{A}_1-\overline{\lambda})-b\times\overline{L'}\times(\overline{A'_1}+\overline{\lambda'})=0,$$
$$\overline{L}\times(\overline{A'_1}-\overline{\lambda'})-\overline{L'}\times(\overline{A}_1+\overline{\lambda})=0.$$

Pour que ce système ait une solution en matrices régulières $\overline{L}$, $\overline{L'}$, il est nécessaire que

$$\overline{A}_1^2-\overline{\lambda}^2-b\times\overline{A}_1'^2+b\times\overline{\lambda}'^2=0.$$

Dans cette égalité,

$$\overline{A}_1^2-b\times\overline{A}_1'^2=(\overline{A}_1+\Theta\overline{A'_1})\times(\overline{A}_1-\Theta\overline{A'_1})$$

n'est autre que le produit $A_1\times A_1^{(1)}=a$. La recherche des nombres rationnels $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda'}$ vérifiant la relation

$$a-\overline{\lambda}^2+b\overline{\lambda'}^2=0$$

est équivalente à la recherche des points rationnels sur la conique (C)

$$x^2-by^2-az^2=0.$$

Cette conique (C) admet une représentation unicursale propre ($\mathcal{C}$) à coefficients dans K,

$$\frac{x}{au^2+v^2}=\frac{\Theta y}{au^2-v^2}=\frac{z}{2uv}; \qquad \frac{u}{z}=\frac{v}{x-\Theta z}.$$

Le système de matrices *associé à la conique* (C) est donc

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = 1;$$

et le système de scalaires *associé à la même conique est* $a, 1, 1, 1$. D'après les résultats du paragraphe III, la conique (C) est équivalente à (F). Le second théorème de Noether-Poincaré est démontré.

Enfin je rappelle le critère de Lagrange :

Pour qu'il existe des points rationnels sur la conique (C)

$$x^2 - by^2 - az^2 = 0,$$

il faut et il suffit que l'entier b soit resté quadratique (*mod. a*).

M. Hasse (9) a montré qu'il était intéressant d'énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Pour qu'il existe des points rationnels sur la conique (C), *il faut et il suffit que* (C) *soit équivalente à* Oy *dans tout corps p-adique, p nombre premier arbitraire.*

CHAPITRE II.

ÉTUDE GALOISIENNE DES VARIÉTÉS DE BRAUER.

Je vais généraliser les méthodes du premier Chapitre en vue de problèmes plus complexes. D'une part, au lieu d'étudier des courbes, j'étudie des variétés d'un hyper-espace de dimension arbitraire; d'autre part, au lieu de ne considérer que des courbes et des correspondances à coefficients rationnels, j'envisage des variétés et des correspondances à coefficients dans un corps P (9bis) quelconque, mais fixé à priori. Je définis ainsi l'équivalence, au sens de Poincaré, des variétés dans le corps P; l'équivalence absolue, étudiée au premier Chapitre, n'est autre que l'équivalence dans le corps P_0 des nombres rationnels. Comme je n'ai étudié dans le premier Chapitre que l'équivalence des courbes unicursales, j'étudie seulement dans ce mémoire l'équivalence des *variétés de Brauer* du corps P.

Ce Chapitre est consacré aux premiers résultats de cette étude : définition des problèmes d'équivalence entre variétés de Brauer de P et mise en équation de ces problèmes suivant la méthode galoisienne; ce qui généralise les paragraphes I, II et IV du Chapitre I.

---

(9) *Voir* le Mémoire cité dans la note (6) et les Mémoires du *Journal de Crelle*, Bd. 152, 1923, S. 129-148, *et* 205-224; Bd. 153, 1923, S. 113-130 et 158-162.

(9bis) La lettre P est la majuscule de la lettre grecque ρ, il ne faut pas la confondre avec P (p français majuscule).

I. — Système d'équivalence entre deux variétés de Brauer.

Dans le premier Chapitre, j'ai introduit, incidemment, un système d'équivalence *relative dans un corps* K_1 entre deux courbes unicursales et rationnelles. Il est utile de généraliser ce procédé : je vais étudier non seulement les correspondances birationnelles à coefficients rationnels entre deux courbes, qui définissent l'équivalence absolue, mais aussi les correspondances birationnelles à coefficients dans un corps P quelconque qui définissent l'équivalence (relative) dans ce corps P. Parallèlement, j'étudie, en généralisation des problèmes diophantiens sur les courbes rationnelles, la recherche des points à coordonnées dans P sur les courbes à coefficients dans P, recherche que j'appelle problème diophantien (relatif) dans P.

Le corps K_1 utilisé au premier Chapitre est un corps de nombres algébriques; j'élargis également cette hypothèse. L'énoncé du critère de Lagrange donné par H. Hasse montre en effet l'intérêt de la notion d'équivalence par rapport à un corps local de Hensel; et c'est sous cette forme que j'ai pu généraliser ce critère. J'envisage donc le cas d'un *corps de base* P quelconque; ce qui soulève plusieurs difficultés : qu'appelle-t-on courbe, point, correspondance dans un tel corps ? Dans la *Géométrie galoisienne*, j'ai réuni les définitions précises des êtres géométriques dans le corps P et j'ai étudié les relations les plus simples existant entre eux, formant ainsi les éléments d'une géométrie dans ce corps.

D'autre part, je désire étudier non plus les courbes, mais les variétés. Alors que la définition de l'équivalence, telle qu'elle a été donnée par Poincaré, s'impose pour les courbes planes, on peut envisager plusieurs notions d'équivalence pour les variétés d'un hyper-espace, suivant la nature des correspondances recherchées entre ces variétés. Dans la *Géométrie galoisienne*, j'ai défini les correspondances homographiques (elles admettent des formules du premier degré); les correspondances birationnelles (elles admettent des correspondances inverses et ne sont pas dégénérées entre les variétés sur lesquelles elles opèrent); les correspondances de Poincaré (elles sont birationnelles et tous leurs points critiques sont isolés). Ce sont ces dernières qui définissent *l'équivalence au sens de Poincaré* que j'envisage ici (je dirai par la suite *équivalence* au lieu de *équivalence au sens de Poincaré* lorsqu'il n'y aura pas de confusion à craindre).

J'étudie donc l'équivalence dans un corps de base P des variétés de ce corps; je me limite aux *variétés de Brauer* de P, ou variétés de P équivalentes à un espace de référence, dans l'extension algébriquement fermée Ω de P. J'ai donné dans la *Géométrie galoisienne* un procédé pour reconnaître si une variété donnée (F) de P est une variété de Brauer; ce procédé permet, le cas échéant, de construire dans Ω une représentation de Poincaré de (F), c'est-à-dire une correspondance de Poincaré entre un espace de référence et (F), ce qui est

nécessaire pour pouvoir appliquer à (F) les méthodes de ce mémoire. J'ai aussi défini pour les êtres géométriques d'une extension k de P, la notion de conjugué introduite au Chapitre I pour les correspondances à coefficients algébriques. Ce qui m'a permis de démontrer les *critères de Galois* qui généralisent une propriété utilisée au Chapitre I, paragraphe I. Je puis alors aborder la recherche des correspondances de Poincaré dans le corps de base P entre deux variétés données de P, généralisation de l'étude du paragraphe I du Chapitre précédent.

Je rappelle les propriétés ainsi obtenues en indiquant les particularités qui se présentent ici dans le cas de deux variétés de Brauer. J'ai considéré deux variétés de P équivalentes entre elles dans l'extension algébriquement fermée Ω de P; ce sont ici deux variétés de Brauer de P de même dimension r. J'ai considéré une variété de comparaison (A) équivalente à (F) et à (F′) dans P : c'est ici l'espace de référence (E_r) de dimension r. J'ai construit deux correspondances de Poincaré à coefficients algébriques et séparables par rapport à P

$$(\mathcal{F}) : \quad \text{espace } (E_r) \rightarrow \text{variété (F)},$$
$$(\mathcal{F}') : \quad \text{espace } (E_r) \rightarrow \text{variété (F')};$$

ce sont ici des représentations de Poincaré de (F) et de (F′). Je choisis une extension finie et séparable k de P contenant $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$, (cette extension n'est pas nécessairement normale comme au Chapitre I); je désigne par K l'extension normale de P engendrée par k. Enfin, le groupe des correspondances de Poincaré (G. P. ${}_P E_r$) de P sur (E_r), ou plus généralement (G. P. ${}_k E_r$) de k sur (E_r), est formé par toutes les homographies non dégénérées sur (E_r) à coefficients dans P, ou dans k.

Si je considérais l'équivalence birationnelle et les variétés unicursales de P (ou variétés birationnellement équivalentes dans Ω à un espace de référence), ce n'est pas ce groupe (G. P. ${}_P E_r$) qu'il me faudrait considérer, mais le groupe (G. R. ${}_P E_r$) des correspondances birationnelles de P sur (E_r); ce dernier groupe est formé par les correspondances de Cremona sur (E_r), correspondances plus complexes que les correspondances homographiques et dont la connaissance actuelle semble insuffisante pour résoudre les problèmes de ce Mémoire.

Le résultat fondamental est le suivant :

(E) — *Les correspondances de Poincaré de* P *entre* (F′) *et* (F)

$$(\mathcal{R}) : \quad \text{variété (F')} \rightarrow \text{variété (F)}$$

peuvent être déterminées par la formule

$$(E, 1) \qquad (\mathcal{R}) = (\mathcal{F}')^{-1} \times (\mathcal{L}) \times (\mathcal{F});$$

dans cette formule, la correspondance $(\mathcal{L})$ *est une homographie non dégénérée sur* (E_r), *arbitraire, à coefficients dans* k, *qui vérifie les équations en* $(\mathcal{L})$

$$(E, 2) \qquad (\mathcal{L})^{(i)} \times (\mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}'_i) \times (\mathcal{L}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $(\mathcal{A}_i)$ *et les* $(\mathcal{A}'_i)$ *sont les homographies non dégénérées sur* (E_r) *définies par*

$$(\mathcal{A}_i) = (\mathcal{F})^{(i)} \times (\mathcal{F})^{-1}, \qquad (\mathcal{A}'_i) = (\mathcal{F}')^{(i)} \times (\mathcal{F}')^{-1}.$$

La formule (E, 1) *établit une correspondance biunivoque entre les correspondances* $(\mathcal{R})$ *et les solutions* $(\mathcal{L})$ *du système* (E, 2).

En particulier, **pour que** (F) **et** (F′) **soient équivalentes dans** P, **il faut et il suffit que le système d'équations** (E, 2) **soit vérifié par au moins une homographie** $(\mathcal{L})$ **de k, non dégénérée sur** (E_r).

Le système (E, 2) est le **système d'équivalence dans** P **entre** (F′) **et** (F), par abréviation de « système des équations d'équivalence dans P entre (F′) et (F), déduit des éléments de comparaison : espace (E_r), représentations $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$, corps K ».

Les homographies $(\mathcal{A}_i)$ [et les homographies $(\mathcal{A}'_i)$] vérifient les relations

$$\text{(E, 3)} \qquad \sigma(\mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}_k) \times (\mathcal{A}_j)^{-1}, \qquad \text{si} \begin{cases} \sigma(0) = 0_j \\ \sigma(0_i) = 0_k; \end{cases}$$

ces relations sont appelées **relations de compatibilité du système d'équivalence** (E, 2).

Je puis notamment former un système d'équivalence entre la variété (F) et elle-même; il est indiqué de choisir dans ce cas les représentations de comparaison $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ identiques entre elles. Les homographies $(\mathcal{A}_i)$ et $(\mathcal{A}'_i)$ sont respectivement identiques deux à deux; le système d'équivalence ainsi formé a au moins une solution, l'homographie identique sur (E_r). De façon plus précise, *les solutions de ce système forment un groupe multiplicatif*, que je désigne par (G. E. $_P$F) et qui est isomorphe au groupe (G. P. $_P$F) [groupe des correspondances de Poincaré sur (F) dans P].

Si un système d'équivalence entre (F′) et (F) a au moins une solution $(\mathcal{L}_1)$, toutes ses solutions s'obtiennent soit en multipliant $(\mathcal{L}_1)$ à droite par un élément quelconque de (G. E. $_P$F), soit en multipliant $(\mathcal{L}_1)$ à gauche par un élément quelconque de (G. E. F′). Dans ce cas, les groupes (G. E. $_P$F) et (G. E. $_P$F′) sont isomorphes entre eux.

II. — Problèmes diophantiens et notion de similitude.

Comme au Chapitre I, le système d'équivalence permet, outre la recherche des correspondances de Poincaré de P entre (F′) et (F), la recherche des points de (F) qui sont dans P. Il permet même une généralisation de ce dernier problème : la recherche de certaines sous-variétés de (F) que je nomme sous-variétés normales de (F) dans P.

J'appelle encore **système étendu d'équivalence entre** (F′) **et** (F), le système d'équations en $(\mathfrak{T})$

$$(\mathrm{E}',\,2)\qquad (\mathfrak{T})^{(i)}\times(\mathfrak{A}_i)=(\mathfrak{A}'_i)\times(\mathfrak{T})\qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

où $(\mathfrak{T})$ est une correspondance simplement rationnelle sur (E_r) à coefficients dans k. Je rappelle la propriété démontrée dans la *Géométrie galoisienne* :

(E′) — Si une correspondance (simplement rationnelle) de P

$$(\mathfrak{C}):\qquad \text{variété (F')}\ \rightarrow\ \text{variété (F)}$$

transforme (F′) en une sous-variété *simple* de (F), elle peut-être déterminée par la formule

$$(\mathrm{E}',\,1)\qquad (\mathfrak{C})=(\mathfrak{F}')^{-1}\times(\mathfrak{T})\times(\mathfrak{F});$$

dans cette formule, $(\mathfrak{T})$ est un élément quelconque de (E. C. $_k\mathrm{E}_r$), [ensemble des correspondances sur (E_r) dans k], vérifiant le système étendu d'équivalence

$$(\mathrm{E}',\,2)\qquad (\mathfrak{T})^{(i)}\times(\mathfrak{A}_i)=(\mathfrak{A}'_i)\times(\mathfrak{T})\qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

La relation entre $(\mathfrak{T})$ et $(\mathfrak{C})$ est encore biunivoque.

J'en déduis la propriété suivante :

Les points simples de (F) *qui sont dans* P *peuvent être déterminés biunivoquement par les solutions* (homographiques et dégénérées) *de* (E′, 2) *qui transforment* (E_r) *en un point.*

En effet, un point *simple* M de P sur (F) définit une correspondance dégénérée entre (F′) et (F)

$$(\mathfrak{C}):\qquad \text{variété(F)}\ \rightarrow\ \text{le point M},$$

à laquelle s'applique la propriété (E′); l'élément de (E. C. $_k\mathrm{E}_r$) ainsi obtenu transforme (E_r) en un point, c'est une homographie dégénérée de cet espace (de nature particulière d'ailleurs). Réciproquement, si une solution (nécessairement homographique et dégénérée) de (E′, 2) transforme (E_r) en un point, elle détermine une correspondance qui transforme (F′) en un point de (F) qui est dans P.

Plus généralement, toute solution $(\mathfrak{T})$ dégénérée du système (E′, 2) définit une sous-variété (G) de (F) dans P, à savoir la sous-variété transformée de (F′) par la correspondance $(\mathfrak{C})=(\mathfrak{F}')^{-1}\times(\mathfrak{T})\times(\mathfrak{F})$, ou, ce qui revient au même, la transformée de (E_r) par la correspondance $(\mathfrak{T})\times(\mathfrak{F})$. On peut encore représenter cette sous-variété (G) par une *variété-image* dans (E_r) : la transformée de (E_r) par $(\mathfrak{T})$; la sous-variété (G) est la transformée par $(\mathfrak{F})$ de sa variété-image.

Parmi ces sous-variétés (G), les plus importantes sont celles qui sont définies par des solutions $(\mathfrak{T})$ *homographiques* (dégénérées) de (E′, 2), c'est-à-dire celles dont les variétés-images sont des *sous-espaces* de (E_r). Je les appelle **sous-variétés normales de (F) dans P.**

La notion de sous-variété normale est indépendante du choix du système d'équivalence étendu (E′, 2). Changer ce système revient à multiplier $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{F}')$ par des correspondances homographiques $(\mathfrak{L})$ et $(\mathfrak{L}')$ non dégénérées sur (E_r); une sous-variété (G) de (F), normale dans le premier système, admet, dans ce système, une variété-image qui est un sous-espace (E) de (E_r); (G) admet, dans le second système, pour variété-image la transformée (E′) de (E) par $(\mathfrak{L})^{-1}$, puisque $(\mathfrak{L}) \times (\mathfrak{F})$ transforme cette variété (E′) en (G); (E′) est aussi un sous-espace de (E_r), donc (G) est aussi une variété normale de F dans le second système.

Je vais établir quelques propriétés importantes de ces sous-variétés normales.

Toute sous-variété normale (G) *de* (F) *dans* P *est une variété de Brauer de* P; *le groupe* (G. E. $_P$G) *est homomorphe à un sous-groupe de* (G. E. $_P$F).

Par définition une sous-variété normale (G) de (F) dans P est équivalente dans Ω (extension algébriquement fermée de P) à sa variété-image (E), car la correspondance $(\mathfrak{F})$ définit une correspondance de Poincaré entre (E) et (G). Le sous-espace (E) de (E_r) est lui-même équivalent à un espace de référence; donc (G) est équivalente dans Ω à un espace de référence, c'est une variété de Brauer. C'est d'ailleurs une variété de P, comme toute variété définie par une solution dégénérée de (E′, 2).

Pour étudier plus facilement le groupe (G. E. $_P$G), je forme le système d'équivalence étendu (E′, 2) de façon que la variété-image de (G) soit un espace de référence. Ce que je puis faire de la façon suivante : je suppose que j'ai choisi, sans précaution, le système (E′, 2), que (G) est définie dans ce système par l'homographie dégénérée $(\mathfrak{T}_1)$ sur (E_r) et que $(\mathfrak{T}_1)$ transforme (E_r) en le sous-espace (E) [qui est la variété-image de (G) dans le système (E′, 2) d'équivalence]. L'espace (E) est dans k et je sais former dans k une homographie non dégénérée $(\mathfrak{L}_1)$ qui transforme (E) en un espace de référence (E_q) (tel que $q < r$, bien entendu). Je remplace le système (E′, 2) par le système déduit des éléments de comparaison suivants : l'espace (E_r), la correspondance $(\mathfrak{F}_1) = (\mathfrak{L}_1)^{-1} \times (\mathfrak{F})$ entre (E_r) et (F), le corps k. Pour ce nouveau système, la variété (G) est définie par l'homographie dégénérée $(\mathfrak{T}_1) \times (\mathfrak{L}_1)$, car le produit

$$(\mathfrak{T}_1) \times (\mathfrak{L}_1) \times (\mathfrak{F}_1)^{-1} = (\mathfrak{T}_1) \times (\mathfrak{L}_1) \times (\mathfrak{L}_1)^{-1} \times (\mathfrak{F}) = (\mathfrak{T}_1) \times (\mathfrak{F})$$

transforme, par hypothèse (E_r) en (G). Comme $(\mathfrak{T}_1) \times (\mathfrak{L}_1)$ transforme (E_r) en (E_q), la variété-image de (G) dans ce nouveau système est (E_q).

La trace sur (E_q) de la correspondance $(\mathcal{F}_1)$ est alors une représentation de Poincaré de (G) dans k. Je puis donc former un système d'équivalence entre (G) et elle-même en choisissant comme éléments de comparaison : l'espace (E_q), la correspondance trace de $(\mathcal{F}_1)$ sur (E_q), le corps k. Les homographies $(\mathcal{B}_i)$, coefficients du système d'équivalence ainsi formé, entre (G) et elle-même, sont les traces sur (E_q) des homographies $(\mathcal{A}_i)$, coefficients du système d'équivalence (E, 2) entre (F) et elle-même et le groupe (G. E. $_P$G) contient les traces sur (E_q) des éléments de (G. E. $_P$G) qui conservent cet espace. Inversement tout élément $(\mathcal{T})$ de (G. E. $_P$G) est la trace d'au moins un élément de (G. E. $_P$F) : la correspondance obtenue en effectuant sur les coordonnées relatives à (E_q) la transformation $(\mathcal{T})$ et en laissant invariantes les autres coordonnées. Donc le groupe (G. E. $_P$G) est homomorphe à un sous-groupe de (G. E. $_P$F), à savoir le sous-groupe formé par les éléments de ce dernier groupe qui laisse invariant l'espace de référence (E_q). Ces faits seront d'ailleurs encore précisés par la suite (Ch. IV, § II).

Je dis que *deux variétés de* P sont *semblables entre elles dans* P, *s'il existe une sous-variété normale de l'une équivalente à une sous-variété normale de l'autre.* Cette condition de similitude n'exige pas, comme la condition d'équivalence, que les variétés aient même dimension.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété de Brauer (F) de P contienne des points de P est qu'elle soit semblable dans P à un point. Les problèmes diophantiens sur deux variétés de Brauer semblables ne sont pas essentiellement distincts : si l'un est résoluble, l'autre l'est aussi. L'étude de la similitude ne me paraît cependant pas suffisante; car je désire non seulement étudier l'existence des points de P sur une variété de Brauer (F) donnée, mais aussi obtenir *tous* ces points par un procédé rationnel. C'est en vue de ce problème que j'établis ci-dessous la généralisation suivante du premier théorème de Nœther-Poincaré :

Une variété de Brauer semblable dans P *à un point est équivalente dans* P *à un espace de référence.*

Les relations qui existent entre la notion de similitude et celle d'équivalence sont encore précisées par le théorème suivant que j'établis aussi ci-dessous :

Si deux variétés de Brauer de P *semblables entre elles ont même dimension, elles sont équivalentes entre elles, dans* P.

III. — Introduction de relations matricielles.

Comme au paragraphe IV du Chapitre I, j'utilise la représentation matricielle des homographies par des matrices. J'indique les rapports qui existent entre ces homographies et ces matrices; je forme les relations entre matrices

qui peuvent remplacer les relations entre homographies envisagées aux paragraphes précédents. Enfin, j'établis une propriété importante généralisant celle de l'association d'une courbe à un ensemble de scalaires (Chap. I, § IV).

Je puis définir une homographie $(\mathcal{L})$ de P sur (E_r) par des relations linéaires en $x_0, x_1, \ldots, x_r$ dans P

$$\frac{y_0}{a_0x_0+\ldots+a_rx_r}=\frac{y_1}{b_0x_0+\ldots+b_rx_r}=\ldots=\frac{y_r}{l_0x_0+\ldots+l_rx_r},$$

et représenter cette homographie par la matrice

$$L=\begin{Vmatrix} a_0 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & l_0 \\ a_1 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r & b_r & \cdot & \cdot & \cdot & l_r \end{Vmatrix}.$$

Si L est *régulière*, l'homographie $(\mathcal{L})$ n'est pas dégénérée et réciproquement. L'homographie $(\mathcal{L})$ transforme alors l'espace (E_r) en lui-même et chaque point de (E_r) est le transformé d'un seul point de (E_r) dans $(\mathcal{L})$. Les polynomes qui déterminent $(\mathcal{L})$ sont définis au produit près par une même fraction rationnelle. Pour que ces polynomes restent linéaires, il faut que ce facteur multiplicatif soit un élément de P, car ces polynomes sont premiers entre eux. La matrice L est définie au produit près par un scalaire arbitraire λ de P.

Si L est *irrégulière*, l'homographie $(\mathcal{L})$ est dégénérée et réciproquement. L'homographie $(\mathcal{L})$ transforme alors l'espace (E_r) en un sous-espace (E') dont la dimension est égale au rang de L diminué d'une unité; chaque point de (E_r) est le transformé dans $(\mathcal{L})$ d'un sous-espace de (E_r). La matrice L est définie au produit près à gauche par certaines matrices dont il n'est pas utile de préciser davantage la nature.

Le *produit de deux matrices*, régulières ou non, représente le produit des homographies représentées par chacun des facteurs. Si deux matrices, régulières ou non, représentent la même homographie, leur somme représente aussi cette homographie.

Le système d'équivalence (E. 2) entre (F') et (F) est équivalent au système matriciel d'équations en L et λ_i

(E. M. 2) $\qquad L'_i \times A'_i = A_i \times L \times \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$:

A_i est une matrice à termes dans K qui représente l'homographie $(\mathcal{A}_i)$, A'_i une matrice à termes dans K qui représente $(\mathcal{A}'_i)$; L est une matrice *régulière* arbitraire à termes dans k, les λ_i des scalaires arbitraires de K. La condition nécessaire et suffisante pour que (F) et (F') soient équivalentes dans P est encore que *le système d'équations* (E. M. 2) *ait au moins une solution en* L, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Je ne cherche pas à quoi est équivalent le système étendu d'équivalence, puisque les solutions de ce système ne sont pas nécessairement des homographies. Je constate seulement que si P est une matrice, régulière ou non, à termes dans k qui vérifie les relations

$$P^{(i)} \times A_i = A'_i \times P \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

elle représente une solution homographique du système étendu (E', 2).

Les relations de compatibilité (E, 3) sont équivalentes aux relations de compatibilité matricielles

$$\text{(C. M.)} \qquad \sigma(A_i) = A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,i}, \quad \text{si} \quad \begin{cases} \sigma(0) = 0_j, \\ \sigma(0_i) = 0_k. \end{cases}$$

où les $a_{\sigma,i}$ sont des scalaires de K, qui sont d'ailleurs déterminés par les matrices A_i.

Une représentation de Poincaré ($\mathfrak{F}$) d'une variété de Brauer (F) de P donnée étant choisie, je puis former l'ensemble des n matrices A_i, puis calculer les $n.N$ scalaires $a_{\sigma,i}$; j'appelle **système de matrices associé dans P à (F)** l'ensemble des matrices A_i et **système de scalaires associé dans P à (F)** l'ensemble des scalaires $a_{\sigma,i}$.

Si deux variétés (F) et (F') sont associées au même système de matrices A_i, elles sont équivalentes; car le système matriciel (E. M. 2) a alors au moins une solution : L matrice unité, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$. Je vais démontrer que :

Si deux variétés de Brauer (F) *et* (F') *de* P *sont associées au même système de scalaires* $a_{\sigma,i}$, *elles sont semblables entre elles dans* P.

[C'est la généralisation de la propriété du paragraphe IV, Chapitre I].

Je considère deux variétés de Brauer (F) et (F') de P associées au même système de scalaires $a_{\sigma,i}$, dont les dimensions r et r' peuvent être différentes.

Il est aisé de former une variété, semblable à une variété donnée (F) de dimension donnée $r_1 \geq r$ et associée au même système de scalaires $a_{\sigma,i}$. Si (F) est une variété d'un espace (E_s) je choisis un système d'équation définissant (F) sur cet espace (E_s) et je considère la variété (F_1) définie sur l'espace (E_{s_1}), [où $s_1 - s = r_1 - r$], par ce système d'équations; (F_1) peut encore être définie par la représentation ($\mathfrak{F}_1$) obtenue en ajoutant à un système de formules d'une représentation ($\mathfrak{F}$) de (F) les relations

$$\frac{Y_{s+1}}{x_{r+1}} = \frac{Y_{s+2}}{x_{r+2}} = \ldots = \frac{Y_{s_1}}{x_{r_1}}.$$

Le système de matrices associé à (F_1) s'obtient de la façon suivante : je borde chaque matrice A_i par $r_1 - r$ lignes et $r_1 - r$ colonnes identiques aux dernières lignes et colonnes d'une matrice unité (formées d'unités dans la diagonale

principale et de zéros partout ailleurs). Les variétés (F) et (F_1) sont toutes deux associées au système de scalaires $a_{\sigma,i}$; la variété (F) est une sous-variété normale de (F_1) qui peut être définie, dans un système d'équivalence entre (E_{r_1}) et (F_1) par une homographie dégénérée qui transforme (E_{r_1}) en (E_r).

Je puis ainsi former deux variétés de Brauer respectivement semblables à (F) et à (F') et de même dimension. De façon plus précise, je suppose avoir rangé (F) et (F') dans un ordre tel que $r \geq r'$; je garde la variété (F_1) = (F) et je remplace la variété (F') par une variété semblable (F'_1), associée au même système de scalaires et de dimension r. Je désigne par A_i et A'_i les systèmes de matrices respectivement associées à (F_1) et à (F'_1), intervenant dans le système matriciel correspondant; elles vérifient les relations de compatibilité matricielles

$$\sigma(A_i) = A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,k},$$
$$\sigma(A'_i) = A'_k \times A'^{-1}_j \times a_{\sigma,k}.$$

A partir d'une matrice carrée V d'ordre r, arbitraire, à termes dans k, je forme la somme

$$P = \sum_i A'^{-1}_i \times V^{(i)} \times A_i \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } n).$$

Cette somme est *a priori* une matrice à termes dans K; les relations de compatibilité matricielles précédentes permettent d'obtenir les conjugués par rapport à P de cette matrice

$$\sigma(P) = \sum_i [\sigma(A'_i)^{-1} \times V^{(k)} \times \sigma(A_i)] = \sum_i [a^{-1}_{\sigma,i} \times A'_i \times A'^{-1}_k \times V^{(k)} \times A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,i}]$$
$$= V \times \left[\sum_k (A'^{-1}_k \times V^{(k)} \times A_k)\right] \times A_j^{-1} = A'_j \times P \times A_j^{-1}.$$

On voit que $\sigma(P)$ ne dépend que du conjugué $\theta_j = \sigma(\theta)$ de θ; d'après les critères de Galois, P est donc une matrice à termes dans k et $\sigma(P)$ est la $j^{ième}$ conjuguée $P^{(j)}$. Enfin P représente une homographie ($\mathfrak{P}$) de k, dégénérée ou non, qui vérifie les relations

$$(\mathfrak{P})^{(j)} \times (\mathfrak{A}_j) = (\mathfrak{A}'_j) \times (\mathfrak{P}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

($\mathfrak{P}$) est une solution homographique du système étendu d'équivalence (E', 2).

Si P *est régulière*, ($\mathfrak{P}$) est une solution du système d'équivalence proprement dit (E, 2); (F_1) et (F'_1) sont équivalentes, donc (F) et (F') sont semblables entre elles dans P.

Si P *est irrégulière*, elle définit une sous-variété canonique (F_2) de (F_1) dans P. Je remplace alors le couple (F_1), (F'_1) par le couple (F_2), (F'_2) = (F_1); ce dernier est formé de variétés respectivement semblables à celles du couple précédent; la plus grande des dimensions de (F_2) et (F'_2) est inférieure (et non

égale) à la plus grande des dimensions de (F_1) et (F'_1). Je range (F_2) et (F'_2) par ordre décroissant des dimensions et je recommence sur ce nouveau couple les opérations déjà effectuées sur le couple (F_1), (F'_1). Comme précédemment, ou bien je constate la similitude de (F_2) et (F'_2), ou bien je construis un troisième couple (F_3), (F'_3) de variétés respectivement semblables à (F_2) et (F'_2) tel que la plus grande des dimensions de (F_3) et (F'_3) soit inférieure (et non égale) à la plus grande des dimensions de (F_2) et (F'_2). Et ainsi de suite. Je remplace ainsi le couple (F), (F') successivement par des couples (F_u), (F'_u) (u entier), de variétés respectivement semblables à (F) et (F'); à chaque opération le maximum des deux dimensions de (F_u) et (F'_u) diminue. Ou bien ces opérations s'arrêtent lorsque je constate la similitude des variétés (F_u), (F'_u) d'un couple ainsi formé; ou bien j'obtiens finalement un couple (F_u), (F'_u) de variétés réduites chacune à un point de P. Comme deux points de P sont des variétés équivalentes entre elles dans P, les variétés (F) et (F') sont, dans tous les cas, semblables entre elles dans P.

CHAPITRE III.

RECOURS A LA THÉORIE DES ALGÈBRES.

Je pourrais continuer simplement à généraliser les méthodes du Chapitre I, comme je l'ai fait au Chapitre précédent. Mais il se trouve qu'une partie des résultats peut se déduire de la Théorie des Algèbres, constituée et étudiée pour un but tout à fait différent par Wedderburn, Dickson, R. Brauer, E. Nœther, Hasse, etc. L'étude actuelle devient par suite une application inédite de cette théorie.

Je montre pour cela, dans ce chapitre, que les solutions homographiques d'un système étendu d'équivalence entre une variété de Brauer (F) et elle-même peuvent être représentées par un ensemble de matrices qui constituent une *Algèbre de Brauer* ([10]) sur le corps de base P, que j'appelle *associée à la variété* (F) *dans* P. Je montre que les critères d'équivalence et de similitude entre variétés de Brauer peuvent être exprimés simplement par des conditions connues concernant les algèbres associées, ce qui permet d'établir un ensemble de propriétés constituant l'extension des deux théorèmes de Nœther-Poincaré.

I. — Les Algèbres de Brauer.

Je rappelle, dans ce paragraphe, les définitions et résultats de la Théorie des Algèbres qui me serviront par la suite ([11]).

([10]) *Voir* au sujet de cette expression la note (4) de l'Introduction.

([11]) Pour la Théorie des Algèbres, j'ai surtout utilisé l'exposé d'ensemble de Deuring : *Algebren*, paru dans la Collection des *Ergebnisse der Mathematik*, tome IV, fascicule 1. C'est à cet Ouvrage

Une *algèbre sur un corps* P est un anneau ([12]), non nécessairement commutatif, (O) contenant P et admettant par rapport à P une base finie $A_1, A_2, \ldots, A_l$: c'est-à-dire que tout élément A de (O) peut être mis sous la forme

$$A = \sum x_i A_i \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } l), \tag{1}$$

où les x_i sont des éléments, ou scalaires, arbitraires du corps de base P. Une algèbre (O) est déterminée par une de ses bases, à condition de connaître, d'une part toutes les relations linéaires

$$\sum_i a_i A_i = 0 \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } l; \text{ les } a_i \text{ scalaires de P}),$$

qui sont vérifiées par les éléments A_i de cette base; d'autre part une table de multiplication de ces éléments entre eux. Dans toute algèbre, il existe au moins une base *minima*, ou *réduite*, dont tous les termes sont *linéairement indépendants*, c'est-à-dire ne vérifient aucune relation linéaire. Par rapport à une telle base tout élément de (O) n'admet qu'une représentation de la forme (1); à l'élément nul correspondent notamment des a_i tous nuls. Toutes les bases réduites d'une même algèbre ont un même nombre d'éléments *qui est le rang de l'algèbre sur le corps de base* P.

Une *extension finie et séparable* k de degré n sur P est une algèbre commutative sur P de rang n; elle peut être définie par la base minima formée par les puissances $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^n$ d'un élément primitif θ. L'ensemble des matrices carrées d'ordre r à termes dans P est une algèbre de rang r^2 sur P, appelée *anneau complet des matrices d'ordre r sur* P; elle peut être engendrée par la base minima formée par les r^2 matrices différentes dont un terme est égal à l'unité et dont tous les autres sont nuls.

Le *produit direct* de deux algèbres (O) et (O') sur P, définies respectivement par les bases minima $A_1, A_2, \ldots, A_l$ et $B_1, B_2, \ldots, B_{l'}$ est l'algèbre sur P définie par la base minima que forment les produits symboliques

$$A_i B_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, l; j = 1, 2, \ldots, l').$$

Le produit direct d'une algèbre (O) sur P et d'une extension finie k de P est

---

que je renvoie le lecteur pour les démonstrations non développées dans ce Mémoire et pour toute autre précision sur ce sujet. Il existe aussi des exposés français (plus anciens et moins complets) de la Théorie des Algèbres dans la Collection des Conférences au *Séminaire de mathématiques* dirigé par M. G. Julia, année 1932-1933, Conférences de Dubreil, Chevalley, Dieudonné, etc. et un exposé anglais de A. Adrian Albert dans le volume XXIV des *Colloques de l'American Math. Soc.* (1939). Enfin on trouvera quelques aperçus sur ces questions dans le tome II de la *Moderne Algebra* de Van der Waerden, Chapitres XV, XVI et XVII (2e édition).

([12]) Les notions d'*anneau*, de *corps*, d'*extension finie*, ..., sont définies dans la *Géométrie galoisienne*. On peut également en trouver un exposé dans plusieurs Traités classiques (*Moderne Algebra* de Van der Waerden; *Éléments de Mathématiques* de Bourbaki, Chapitre I du Livre II sur les structures algébriques).

donc identique, en tant qu'anneau, à l'algèbre sur k engendrée par une base minima formée d'éléments de (O) linéairement indépendants sur P. En particulier, l'anneau complet des matrices d'ordre r sur k est identique, en tant qu'anneau, au produit direct du corps k et de l'anneau complet des matrices d'ordre r sur P, considérés comme algèbres sur P.

On définit généralement les *algèbres normales et simples sur* P, ou **algèbres de Brauer sur** P, par des conditions concernant les éléments et les idéaux de ces anneaux ([13]). J'utilise seulement la propriété caractéristique suivante :

Pour une algèbre de Brauer (O) sur P, il existe au moins une extension finie et séparable k de P qui soit *corps de décomposition* de (O)([14]); c'est-à-dire une extension finie et séparable k telle que le produit direct de (O) et de k, considéré comme algèbre sur P, soit isomorphe, en tant qu'anneau, à un anneau complet de matrices sur k.

Ceci est encore équivalent au fait que :

(O) *est isomorphe à un ensemble* (Ens. P) *de matrices carrées* P, *de même ordre* r, *à termes dans* k, *et telles que* :

1° *toute matrice carrée* V *d'ordre* r *à termes dans* k *est identique à une combinaison linéaire, à coefficients scalaires, d'éléments de* (Ens. P).

2° *Les seuls scalaires contenus dans* (Ens. P) *sont tous les scalaires de* P.

Il en résulte, en particulier, que le rang d'une Algèbre de Brauer (O) par rapport à P est égale à un carré r^2.

II. — Algèbre définie par un système de matrices.

Je vais maintenant établir la propriété des algèbres de Brauer qui permet d'associer une telle algèbre à chaque variété de Brauer. Cette propriété n'a pas encore été mentionnée, à ma connaissance, par les auteurs qui se sont occupés de ces questions.

Je considère une extension finie et séparable k de degré n du corps de base P et j'en choisis un élément primitif θ. J'utilise, comme au chapitre précédent,

---

([13]) Une algèbre est normale (*normale Algebra*) quand les éléments du corps de base sont les seuls êtres permutables avec tous ses éléments (p. 9 des *Algebren*); elle est simple (*einfache Algebra*) si ses idéaux bilatères (invariants pour tout produit à droite et à gauche) sont les seuls idéaux triviaux : zéro et l'algèbre (O) elle-même (p. 17 des *Algebren*).

([14]) La définition ci-dessus d'un corps de décomposition (*Zerfallungskörper*) est celle de la page 46 des *Algebren*; le théorème 18 de la page 47 de cet ouvrage montre l'existence d'un tel corps qui soit une extension finie et séparable du corps de base P, pour toute Algèbre de Brauer sur P. Quant au fait que l'existence d'un corps de décomposition soit une propriété caractéristique d'une telle algèbre, il résulte simplement des théorèmes 5 de la page 37 et 1 de la page 15 des *Algebren*.

les notations de la *Géométrie galoisienne* pour les conjugués des êtres numériques, algébriques et géométriques de k par rapport à P et pour les éléments du groupe de Galois G de k par rapport à P. En particulier K désigne le corps normal, extension de k.

J'appelle *système compatible de matrices* un ensemble de n matrices carrées A_i d'ordre r, régulières, à termes dans K et vérifiant les relations de compatibilité matricielles

$$\text{(C. M.)} \qquad \sigma(A_i) = A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,j} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \sigma(0) = 0_j, \\ \sigma(0_j) = 0_k, \end{cases}$$

où $a_{\sigma,j}$ est un scalaire quelconque de K.

Je considère l'anneau complet (Ens. V) des matrices carrées d'ordre r à termes dans k et je vais montrer que :

L'ensemble (Ens. P) *des éléments de* (Ens. V) *qui vérifient le système d'équations en* P

$$\text{(M, 1)} \qquad P^{(i)} \times A_i = A_i \times P, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est une algèbre de Brauer sur P, *dont* k *est un corps de décomposition.*

L'algèbre (Ens. P) est **l'algèbre définie par le système de matrices** A_i.

Comme au paragraphe III du Chapitre II, je forme, à partir d'un élément arbitraire V de (Ens. V), la somme

$$P = \sum_i A_i^{-1} \times V^{(i)} \times A_i \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } n).$$

C'est, *a priori*, une matrice d'ordre r à termes dans K. Je cherche l'effet produit sur cette matrice par une substitution σ du groupe de Galois G de K par rapport à P; j'obtiens

$$\sigma(P) = \sum_i [\sigma(A_i)^{-1} \times V^{(k)} \times \sigma(A_i)],$$

ou, en tenant compte des relations de compatibilité (C. M.),

$$\sigma(P) = \sum_k [a_{\sigma,i}^{-1} \times A_j \times A_k^{-1} \times V^{(k)} \times A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,i}] = A_j \times P \times A_j^{-1}.$$

Le conjugué $\sigma(P)$ ne dépend que de l'effet $0_j = \sigma(0)$ de σ sur 0; d'après les critères de Galois, P est une matrice à termes dans k. De plus, elle vérifie les relations

$$P^{(j)} = A_j \times P \times A_j^{-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

c'est donc une solution du système (M, 1). Réciproquement, toute solution P du système (M, 1) peut être mise sous la forme d'une telle somme (de plusieurs façons possibles), par exemple

$$P = \sum_i \left[A_i^{-1} \times \left(\frac{P}{n} \right)^{(i)} \times A_i \right].$$

Par ailleurs, les solutions dans k du système (M, 1) forment un anneau [la somme, la différence et le produit de 2 d'entre elles vérifient aussi ce système et ont tous leurs termes dans k]. Cet anneau contient le corps P et il admet une base par rapport à P, puisqu'on peut obtenir ses éléments sous la forme de sommes

$$\sum_i [\mathrm{A}_i^{-1} \times \mathrm{V}^{(i)} \times \mathrm{A}_i],$$

où les matrices V appartiennent à un anneau de base finie par rapport à P : *l'anneau* (Ens. P) *est donc une algèbre sur* P.

Je considère alors les n éléments de (Ens. P) suivants :

$$\mathrm{P}_1 = \sum_i [\mathrm{A}_i^{-1} \times (0 \,.\, \mathrm{V})^{(i)} \times \mathrm{A}_i] = \sum_i [0_i \times \mathrm{A}_i^{-1} \times \mathrm{V}^{(i)} \times \mathrm{A}_i],$$

$$\mathrm{P}_2 = \sum_i [\mathrm{A}_i^{-1} \times (0^2 \,.\, \mathrm{V})^{(i)} \times \mathrm{A}_i] = \sum_i [0_i^2 \times \mathrm{A}_i^{-1} \times \mathrm{V}^{(i)} \times \mathrm{A}_i],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\mathrm{P}_n = \sum_i [\mathrm{A}_i^{-1} \times (0^n \,.\, \mathrm{V})^{(i)} \times \mathrm{A}_i] = \sum_i [0_i^n \times \mathrm{A}_i^{-1} \times \mathrm{V}^{(i)} \times \mathrm{A}_i],$$

où V est un élément arbitraire de (Ens. V). Puisque 0 est un élément primitif de k, le déterminant

$$\Delta = |0_i^j| = |(0^j)^{(i)}|$$

est différent de 0; et les produits $\mathrm{A}_i^{-1} \times \mathrm{V}^{(i)} \times \mathrm{A}_i$ peuvent être tous exprimés en fonctions linéaires à coefficients scalaires (dans K) de $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$. Or la relation de compatibilité (C. M.) qui correspond au choix de $i = 1$ et de σ identique à l'opération unité du groupe G montre que A_1 est un scalaire; donc :

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}_1^{-1} \times \mathrm{V}^{(1)} \times \mathrm{A}_1.$$

Ainsi V s'exprime en fonction linéaire des éléments $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ de (Ens. P). Les coefficients de cette fonction linéaire qui, *a priori*, sont dans K, sont les mineurs de Δ relatifs à la première colonne, et sont des scalaires de k. Le corps k vérifie donc la propriété 1° des corps de décomposition de l'algèbre (Ens. P) (paragraphe I de ce Chapitre).

En outre, les relations (M, 1) prouvent que les seuls scalaires contenus dans (Ens. P) sont ceux de P : le corps k vérifie aussi la propriété 2° des corps de décomposition de l'algèbre (Ens. P), c'est donc un corps de décomposition de cette algèbre. Par suite, *l'algèbre* (Ens. P) *est une algèbre de Brauer* (d'après leur propriété caractéristique).

Inversement :

Une algèbre de Brauer (O) *sur* P *est isomorphe à* (au moins) *une algèbre définie par un système compatible de matrices.*

Je choisis un corps de décomposition k de cette algèbre (O), corps qui soit une extension finie et séparable de P. Je forme l'anneau de matrices (Ens. P) correspondant à ce corps de décomposition; les éléments de (Ens. P) sont d'ordre r (r^2 étant le rang de (O) sur P). Je construis la $i^{ième}$ conjuguée $P^{(i)}$ de chaque élément P de (Ens. P); l'ensemble (Ens. $P^{(i)}$) de ces matrices est un anneau isomorphe à (Ens. P), donc aussi à l'algèbre de Brauer (O). En vertu d'un théorème d'E. Nœther ([15]), l'existence de deux anneaux de matrices (Ens. P) et (Ens. $P^{(i)}$), isomorphes tous deux à (O), entraîne l'existence d'une matrice régulière A_i, d'ordre r, à termes dans K, réalisant cette isomorphie par la transmutation

$$P^{(i)} = A_i \times P \times A_i^{-1}.$$

J'ai ainsi formé n matrices régulières $A_1, A_2, \ldots, A_n$: elles constituent un système compatible. En effet, je puis calculer $\sigma(A_i)$ en effectuant l'opération σ sur la relation

$$P^{(i)} = A_i \times P \times A_i^{-1};$$

j'obtiens

$$\sigma(P^{(i)}) = P^{(k)} = \sigma(A_i) \times P^{(j)} \times \sigma(A_i)^{-1},$$

ou encore, en tenant compte des relations vérifiées par $P^{(k)}$ et $P^{(j)}$

$$A_k \times P \times A_k^{-1} = \sigma(A_i) \times A_j \times P \times A_j^{-1} \times |\sigma(A_i)|^{-1},$$
$$P \times A_k^{-1} \times \sigma(A_i) \times A_j = A_k^{-1} \times \sigma(A_i) \times A_j \times P.$$

La dernière relation montre que la matrice $[A_k^{-1} \times \sigma(A_i) \times A_j]$ est permutable avec chaque élément de (Ens. P); comme elle est permutable avec tout scalaire, elle est aussi permutable avec tous les éléments du produit direct de k et de (Ens. P), considérés comme algèbres sur P. Ce produit direct est, par hypothèse, l'anneau complet des matrices d'ordre r sur k; cela exige que cette matrice soit un scalaire $a_{\sigma,i}$ (de K), de sorte que

$$\sigma(A_i) = A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,i}.$$

L'ensemble des matrices A_i est bien un système compatible. Il détermine sur P une algèbre (O') qui admet k comme corps de décomposition; je vais montrer que cette algèbre est identique à (Ens. P).

Il est d'abord clair que (O') contient tous les éléments de (Ens. P), puisqu'un tel élément vérifie, par construction des A_i, les relations

$$P^{(i)} \times A_i = A_i \times P \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent (O'). D'autre part, k est, par hypothèse, corps de décomposition de (O), donc aussi de (Ens. P); k est également corps de décomposition de (O'), d'après les propriétés de cette algèbre. Les produits directs de k, soit

([15]) C'est le théorème 3 de la page 42 des *Algebren*.

avec (O'), soit avec (Ens. P), sont donc tous deux identiques à l'anneau complet des matrices d'ordre r sur k et par suite confondus. L'algèbre ne peut, par suite, contenir d'éléments extérieurs à (Ens. P), car dans le cas contraire le produit direct de k et de (O') contiendrait des éléments extérieurs au produit direct de k et de (Ens. P). Ce qui montre bien que (O') contient tous les éléments de (Ens. P) et ceux-là seuls.

Ainsi l'algèbre (O) est isomorphe à l'algèbre (Ens. P) définie par le système compatible de matrices A_i.

III. - Algèbre associée à une variété de Brauer.

Au paragraphe III du Chapitre II, j'ai associé, à chaque variété de Brauer (F) sur P, un système de matrices dont j'ai montré qu'il est compatible. D'après les résultats du précédent paragraphe, ce système définit une algèbre de Brauer sur P, que j'appelle **algèbre de Brauer associée dans P à la variété** (F). J'établis quelques propriétés essentielles de cette algèbre qui montrent l'utilité de cette notion pour les problèmes d'équivalence.

Les solutions homographiques d'un système étendu d'équivalence entre (F) *et elle-même peuvent être représentées par tous les éléments de l'algèbre* (Ens. P.) *associée dans* P *à* (F).

Je considère une telle solution $(\mathfrak{T})$ et je choisis une des matrices V, à termes dans k, qui représentent cette homographie. Les relations du système étendu d'équivalence montrent que $(\mathfrak{T})$ est ausssi représentée par chacune des matrices $A_i \times V^{(i)} \times A_i^{-1}$ et par leur somme

$$P = \sum_i | A_i \times V^{(i)} \times A_i^{-1} | \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } n).$$

Mais d'après les raisonnements du paragraphe précédent, cette somme est un élément de (Ens. P).

Ce résultat contient notamment le suivant :

Le groupe (G. P. $_P$F) *des correspondances de Poincaré sur* (F) *dans* P *est isomorphe au groupe-quotient du groupe formé par les éléments réguliers de* (Ens. P) *par le groupe de scalaires de* P.

Je précise encore une propriété utile pour la suite :

Quand on remplace le corps de base P *par une de ses extensions finies et séparables* P', *l'algèbre* (Ens. P) *associée à* (F) *dans* P *est remplacée par le produit direct de* (Ens. P) *et de* P', *considérés comme algèbres sur* P.

Je choisis un système compatible de matrices, associé dans P à (F). Pour obtenir un système de matrices, associé dans P′ à (F), je puis parmi elles prendre celles qui correspondent aux conjugués relatifs θ_i de θ par rapport à P′ ; ce fait est démontré dans la *Géométrie galoisienne*. Ces matrices définissent donc une algèbre (O') formée par les solutions d'un système dont toutes les relations sont vérifiées par les éléments de (Ens. P) : de sorte que (O') contient les éléments de (Ens. P). Comme (O') est une algèbre sur P′, elle contient aussi tous les scalaires du corps de base P′, et le produit direct de (Ens. P) et de P′, considérés comme algèbres sur P. Ce produit direct est une algèbre de rang $|(r+1)^2 . n'|$ sur P (r désignant toujours la dimension de (F) et n' le degré de P′ par rapport à P) c'est donc une algèbre de rang $(r+1)^2$ sur P′. Comme (O') est aussi une algèbre de rang $(r+1)^2$ sur P′, elle ne peut contenir d'autres éléments que ceux de ce produit direct avec lequel elle est confondue.

Enfin, je démontre la propriété fondamentale :

Pour que deux variétés de Brauer sur P *soient équivalentes, au sens de Poincaré, dans* P, *il faut et il suffit que les algèbres associées à ces variétés dans* P *soient isomorphes entre elles.*

Je considère deux variétés de Brauer (F) et (F′) sur P et deux systèmes compatibles de matrices A_i et A'_i respectivement associées dans P à ces variétés. Si (F) et (F′) sont équivalentes dans P, elles ont même dimension r et les systèmes A_i et A'_i sont formés par des matrices de même ordre $r+1$. De plus, d'après les résultats du Chapitre II, paragraphe III, il existe une matrice régulière L_0, d'ordre $r+1$, à termes dans K, qui vérifie les relations

$$L_0^{(i)} \times A_i = A'_i \times L_0 \times \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires de K.

La transmutation définie par les formules

$$P' = L_0 \times P \times L_0^{-1} \qquad \text{ou} \qquad P = L_0^{-1} \times P' \times L_0,$$

transforme alors l'algèbre associée à (F) en l'algèbre associée à (F′) dans P. En effet, l'algèbre associée à (F) est l'ensemble des solutions du système

$$P^{(i)} \times A_i = A_i \times P \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la transmutation précédente transforme cet ensemble en l'ensemble des solutions du système

$$(L_0^{(i)})^{-1} \times P'^{(i)} \times L_0^{(i)} \times A_i = A_i \times L_0^{-1} \times P' \times L_0,$$

qui est équivalent à

$$P'^{(i)} \times L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} = L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} \times P',$$

ou, en tenant compte des relations vérifiées par L_0, à

$$P'^{(i)} \times A'_i \times \lambda_i = \lambda_i \times A'_i \times P',$$

ou, puisqu'un scalaire est permutable avec toute matrice, au système

$$P'^{(i)} \times A'_i = A'_i \times P \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les solutions forment bien l'algèbre associée à (F') dans P.

Réciproquement, si les algèbres associées à (F) et à (F') dans P sont isomorphes, les systèmes A_i et A'_i sont formés par des matrices de même ordre, soit $r+1$; de plus, d'après le théorème rappelé d'E. Nœther ([16]), il existe une matrice L qui réalise cette isomorphie par la transmutation

$$P = L_0^{-1} \times P' \times L_0.$$

Ce qui veut dire que les deux systèmes

$$P'^{(i)} \times A'_i = A'_i \times P,$$

$$(L_0^{(i)})^{-1} \times P'^{(i)} \times L_0^{(i)} \times A_i = A_i \times L_0^{-1} \times P' \times L_0$$

ont mêmes solutions, celles-ci formant l'algèbre de Brauer (Ens. P'), associée dans P à (F'). J'en déduis que tout élément de (Ens. P') vérifie encore les relations

$$A'_i \times P' \times A'^{-1}_i \times L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} = L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} \times P'$$

ou

$$P' \times A'^{-1}_i \times L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} = A'^{-1}_i \times L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} \times P'.$$

Donc la matrice $A'^{-1}_i \times L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1}$ est permutable avec chaque élément de (Ens. P'); comme elle est permutable avec tout scalaire, elle est aussi permutable avec tout élément du produit direct de (Ens. P') et de k, considérés comme algèbres sur P. Puisque (Ens. P') est une algèbre de Brauer et admet k comme corps de décomposition, ce produit direct est un anneau complet de matrices sur k; ce qui exige que la matrice précédente soit un scalaire λ_i (de K) :

$$A'_i \times L_0^{(i)} \times A_i \times L_0^{-1} = \lambda_i \quad \text{ou} \quad L_0^{(i)} \times A_i = A'_i \times L_0 \times \lambda_i.$$

D'après les résultats du Chapitre II, paragraphe III, l'existence d'une matrice L_0 régulière vérifiant ces relations entraîne l'équivalence de (F) et (F') dans P.

CHAPITRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DES VARIÉTÉS DE BRAUER.

Je traduis maintenant des résultats connus de la théorie des algèbres en langage de la théorie des variétés de Brauer. Je commence par des propriétés générales valables, quel que soit le corps de base P. Ces propriétés comprennent notamment des généralisations des deux théorèmes de Nœther-Poincaré.

([16]) *Voir* la Note ([15]) du Chapitre III, paragraphe II.

1. — Premier théorème et corps de représentation.

Je vais établir une généralisation du premier théorème de Nœther-Poincaré, ainsi que des généralisations des propriétés des corps de représentation (exposées au paragraphe V du Chapitre I).

Si une variété de Brauer (F) *admet une représentation de Poincaré dans le corps de base* P, *les points simples sur* (F) *qui sont dans* P *sont ceux dont le paramètre* (dans cette représentation) *est dans* P; *réciproquement s'il existe au moins un point simple sur* (F) *dans* P, *cette variété admet* (au moins) *une représentation de Poincaré dans* P.

La propriété directe est immédiate, puisqu'une représentation de Poincaré de (F) dans P définit une correspondance du même nom entre l'espace des paramètres et la variété (F). Pour démontrer la réciproque, j'utilise un théorème fondamental de Wedderburn ([17]).

Toute algèbre de Brauer (*O*) *sur* P *est isomorphe à un anneau complet de matrices sur un corps gauche.*

Ce corps gauche est lui-même une algèbre de Brauer sur P qui admet les mêmes corps de décomposition que (*O*); il est isomorphe à un ensemble de matrices (à coefficients dans un de ces corps de décomposition k) dont l'ordre est appelé l'index de l'algèbre (*O*).

Je considère une variété de Brauer (F) de dimension r, un système étendu d'équivalence (E′, 2) entre (F) et elle-même dans P et l'algèbre (*O*) définie par ce système. D'après les résultats du Chapitre II, paragraphe II, les points simples sur (F) dans P peuvent être déterminés par les solutions homographiques et dégénérées (si elles existent) du système (E′, 2) qui transforment l'espace (E_r) en un point. Comme je l'ai établi au paragraphe III du Chapitre II, ces solutions sont représentées par les éléments de rang 1 de (*O*). Pour chercher s'il existe des points simples sur (F) qui sont dans P, je puis donc chercher s'il existe des éléments de rang 1 dans (*O*).

J'applique le théorème de Wedderburn à l'algèbre (*O*); je désigne par (O_0) le corps gauche ainsi obtenu et je représente ses éléments par des matrices à coefficients dans un corps de décomposition k de (*O*). Puisque (O_0) ne contient pas de diviseurs de zéro, chacune de ces matrices est régulière; son rang est égal à son ordre qui n'est autre que l'index t de (*O*). L'algèbre (*O*) est ainsi isomorphe à un anneau (Ens. P) de matrices composées : matrices d'ordre u à termes matriciels d'ordre t, donc encore matrices d'ordre $u.t$, à termes scalaires

([17]) Ce théorème est énoncé et démontré à la page 18 (théorème 3) des *Algebren*.

de k. Comme les éléments de (O) sont des matrices d'ordre $r+1$ sur k, il en résulte que

$$r+1 = u.t;$$

l'index t est un diviseur de $r+1$. De plus le rang de tout élément de (Ens. P), considéré comme matrice sur k, est au moins égal à t, puisque cet élément contient des mineurs (les éléments du corps gauche) réguliers et d'ordre t. En particulier (O) ne peut contenir d'éléments de rang 1 que si $t=1$, donc si (O) est isomorphe à l'anneau complet des matrices d'ordre $r+1$ sur P.

Enfin l'algèbre associée dans P à l'espace de référence de dimension r est isomorphe à l'anneau complet des matrices d'ordre $r+1$ sur P. Pour le constater, il suffit de former le système étendu d'équivalence dans P entre l'espace (E_r) et lui-même déduit des éléments de comparaison : espace (E_r), correspondance identique sur (E_r), corps P. Le système de matrices correspondant contient une seule matrice identique à la matrice unité; l'algèbre associée est l'ensemble des solutions de la seule relation identiquement vérifiée $P^{(1)} = P$. Cette algèbre est bien l'anneau complet des matrices d'ordre $r+1$ sur P. D'après les résultats du paragraphe précédent, il est nécessaire, pour qu'il existe des points simples de P sur (F), que (F) soit équivalente à l'espace (E_r). Cette condition entraine immédiatement celle de l'énoncé, puisqu'une représentation de Poincaré de (F) définit une correspondance du même nom entre (E_r) et (F) et inversement.

J'applique ce résultat à la recherche des **corps de représentation de** (F); comme au paragraphe V du Chapitre I, j'appelle ainsi toute extension (finie et séparable) P′ de P dans laquelle existent des points simples sur (F), ou, d'après le résultat précédent, une représentation de Poincaré de (F).

Pour qu'une extension (finie et séparable) P′ *de* P *soit corps de représentation de* (F), *il faut et il suffit que* P′ *soit corps de décomposition de l'algèbre* (O) *associée à* (F) *dans* P.

Je viens de montrer que, pour que P′ soit corps de représentation de (F), il faut et il suffit que l'algèbre associée à (F) dans P′ soit isomorphe à un anneau complet de matrices sur P′. Mais j'ai aussi montré, au paragraphe III du Chapitre III, que l'algèbre associée à (F) dans P′ est isomorphe au produit direct de l'algèbre associée à (F) dans P et du corps P′, considérés comme algèbres sur P. Le théorème résulte immédiatement de ces deux propriétés et de la définition des corps de décomposition.

L'index t de l'algèbre de Brauer associée dans P *à* (F) *divise le degré par rapport à* P, *de tout corps de représentation de* (F). *Il existe des corps de représentation de* (F) *dont le degré relatif par rapport à* P *est égal à t.* Pour exprimer ces propriétés, j'appelle encore t l'**index de la variété de Brauer** (F) **dans** P.

Ceci résulte de ce qui précède et des propriétés suivantes des corps de décomposition : l'index t d'une algèbre de Brauer (O) sur P divise le degré relatif par rapport à P de tout corps de décomposition de (O); il existe effectivement du corps de décomposition de (O) de degré t par rapport à P ([18]).

J'ai montré, au cours d'une démonstration précédente de ce paragraphe, que l'index t d'une algèbre de Brauer divise aussi l'ordre des matrices qui forment cette algèbre. Donc le dernier théorème a pour conséquence :

Si une variété de Brauer (F) *sur* P *est de dimension* r, *il existe des corps de représentation de* (F) *dont le degré, par rapport à* P, *divise* $r+1$. Ceci généralise le résultat du paragraphe V du Chapitre I montrant l'existence d'un corps quadratique de représentation pour toute courbe unicursale et rationnelle (dont la dimension est 1).

S'il existe des corps de représentation de (F) *dont le degré relatif par rapport à* P, *est premier avec* $r+1$ [où r est la dimension de (F)], P *est lui-même corps de représentation de* (F).

En effet, l'index t de (F) divise $r+1$, ainsi que le degré de tout corps de représentation de (F). Si ces deux nombres sont premiers entre eux, t est nécessairement égal à 1, c'est-à-dire que P est corps de représentation (F).

Ce théorème comporte comme cas particulier une propriété bien connue :

Il existe des points rationnels simples sur toute courbe unicursale et rationnelle de degré impair.

En effet, pour une courbe, $r+1$ est égal à 2. D'autre part, en coupant une courbe de degré impair par une droite rationnelle, j'obtiens plusieurs points à coordonnées algébriques, dont l'un au moins engendre un corps de degré impair.

II. — Sous-variétés normales et condition de similitude.

Dans ce paragraphe, j'établis quelques propriétés des sous-variétés normales d'une variété de Brauer et j'indique une condition générale de similitude de ces variétés.

Un raisonnement analogue à celui de l'extension du premier théorème de Nœther-Poincaré montre que :

S'il existe une sous-variété normale de (F) *dans* P *de dimension* r', *l'index* t *de* (F) *dans* P *divise* $r'+1$.

([18]) La première partie de cette propriété n'est autre que le théorème 17 de la page 47 des *Algebren*; la seconde résulte immédiatement des théorèmes 16 et 18 de la même page.

D'une part, les sous-variétés normales de (F) dans P de dimension r' sont déterminées par les éléments irréguliers de rang $r'+1$ de l'algèbre associée à (F) dans P. J'ai montré, au paragraphe II du Chapitre II, que les sous-variétés normales de (F) dans P peuvent être déterminées par les solutions homographiques et dégénérées d'un système étendu d'équivalence entre (F) et elle-même dans P. Ces éléments sont représentés par les éléments irréguliers de l'algèbre (O). En outre une sous-variété normale de dimension r' est représentée par un élément de rang $r'+1$, puisque l'homographie correspondante transforme (E_r) en un espace de dimension r'.

D'autre part, j'ai montré, au paragraphe précédent, que le rang d'un élément irrégulier de (O) est au moins égal à l'index t de (O); de façon plus précise, ce rang est un multiple de t. En effet, chaque élément de (O) est identique à une matrice composée : matrice d'ordre u à termes dans le corps gauche (O_0), c'est-à-dire termes matriciels d'ordre t. Le rang de cette matrice composée est égal au produit de t et du rang de la matrice à termes dans (O_0). Le théorème énoncé résulte immédiatement de la comparaison de ces deux faits.

Il existe des sous-variétés normales de (F) *dans* P *de dimension* $t-1$, *nombre qui est donc le minimum de la dimension des sous-variétés canoniques de* (F).

Car il existe des éléments de rang t dans (O), par exemple la matrice composée dont un terme est identique à l'unité de (O_0) et dont tous les autres termes sont identiques à l'élément nul de (O_0).

Une sous-variété normale de (F) *dans* P *est associée à une algèbre semblable dans* P *à l'algèbre* (O) *associée dans* P *à* (F).

Deux algèbres sur P sont *semblables*, si elles sont isomorphes à des anneaux complets de matrices sur le même corps gauche (O_0)([19]).

Je reprends la construction faite au paragraphe II du Chapitre II d'un système étendu d'équivalence entre une sous-variété canonique (G) de (F) et elle-même : je puis choisir la correspondance de comparaison pour la variété (F) en sorte que la sous-variété (G) soit déterminée par une homographie qui transforme (E_r) en un espace de référence (E_q); les solutions d'un système étendu d'équivalence entre (G) et elle-même peuvent être obtenues en prenant la trace sur (E_q) des solutions du système étendu d'équivalence entre (F) et elle-même. Donc les éléments de l'algèbre $(\mathcal{O})$ associée dans P à (F') sont les mineurs, formés par les $q+1$ premières lignes et colonnes, des éléments de l'algèbre (O) associée dans P à (F). Ces mineurs forment un anneau complet de matrices

([19]) C'est la définition de la page 45 des *Algebren*.

sur (O_0), de même que ces matrices elles-mêmes. En particulier, les sous-variétés normales de (F) de dimension minima $t-1$ sont associées dans P au corps gauche (O_0).

Je suis maintenant en mesure d'établir un critère de similitude entre variétés de Brauer :

Pour que deux variétés de Brauer soient semblables entre elles dans P, *il faut et il suffit que les algèbres qui leur sont respectivement associées dans* P *soient semblables entre elles.*

En effet, si deux variétés (F) et (F′) de P sont semblables entre elles, il existe une sous-variété normale de (F) équivalente dans P à une sous-variété normale de (F′). Les algèbres respectivement associées à ces sous-variétés sont isomorphes entre elles; comme elles sont semblables respectivement aux algèbres associées à (F) et à (F′) dans P, ces dernières sont semblables entre elles.

Inversement, je considère deux variétés de Brauer (F) et (F′) associées dans P à des algèbres (O) et (O') semblables entre elles. Ces algèbres sont donc isomorphes à des anneaux complets de matrices sur un même corps gauche (O_0) et, par suite, ont même index t. Il existe des sous-variétés normales de (F) et de (F′), toutes deux de dimension $t-1$; elles sont toutes deux associées dans P au corps gauche (O_0) et par suite équivalentes entre elles, ce qui démontre la similitude de (F) et (F′).

Il en résulte les propriétés suivantes :

Pour que deux variétés de Brauer de P *soient semblables entre elles dans* P, *il faut et il suffit que tout corps de représentation de l'une soit aussi corps de représentation de l'autre.*

En effet, pour que deux algèbres de Brauer sur P soient semblables entre elles dans P, il faut et il suffit que tout corps de décomposition de l'une soit corps de décomposition de l'autre.

Si deux variétés de Brauer de P *de même dimension r sont semblables entre elles, elles sont équivalentes.*

En effet, les algèbres associées sont isomorphes à des anneaux complets de matrices sur un même corps gauche (O_0); de plus ces anneaux sont formés par des matrices de même ordre, à savoir $\frac{r+1}{t}$, (t désignant l'index commun à ces deux algèbres). Ces anneaux, et, par suite, les algèbres associées elles-mêmes sont donc isomorphes entre eux.

III. — Second théorème.

Pour obtenir une généralisation du second théorème de Nœther-Poincaré, il reste à trouver une variété (C), aussi simple que possible, semblable à une variété de Brauer donnée.

Je montre d'abord que :

Pour qu'une variété de Brauer (F), *associée dans* P *au système de scalaire* $a_{\sigma,i}$ *de* K, *soit semblable dans* P *à un point, il faut et il suffit qu'il existe n scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *du corps k tels que*

$$\sigma(\lambda_i) = \lambda_k \times \lambda_j^{-1} \times a_{\sigma,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad \sigma \text{ opération de G}).$$

Je suppose (F) semblable à un point et je forme un système de matrices A_i de K, associé dans P à (F). D'après les résultats du paragraphe III, Chapitre II, il existe une matrice régulière P à termes dans k vérifiant le système matriciel d'équivalence

$$P^{(i)} \times A_i = \lambda_i \times P \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{E. M. 2}$$

où les λ_i sont des scalaires de K. Je déduis de la relation de rang i de ce système, par application de l'élément σ du groupe de Galois G de k par rapport à P, que

$$P^{(k)} \times \sigma(A_i) = \sigma(\lambda_i) \times P^{(j)},$$

ou, en tenant compte des relations de compatibilité matricielles vérifiées par les A_i,

$$P^{(k)} \times A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,i} = \sigma(\lambda_i) \times P^{(j)}.$$

J'applique les relations de rang k et j du système (E. M. 2)

$$\lambda_k \times P \times a_{\sigma,i} = \sigma(\lambda_i) \times \lambda_j \times P,$$

j'obtiens finalement

$$\sigma(\lambda_i) \times \lambda_j = \lambda_k \times a_{\sigma,i}.$$

Réciproquement, je suppose qu'il existe n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de K vérifiant cette relation. Puisque la matrice A_i n'est définie qu'au produit près par un scalaire de K, je puis la remplacer par $B_i = \lambda_i^{-1} \times A_i$. Or je constate que

$$\sigma(B_i) = \sigma(\lambda_i)^{-1} \times \sigma(A_i) = \lambda_j \times a_{\sigma,i}^{-1} \times \lambda_k^{-1} \times A_k \times A_j^{-1} \times a_{\sigma,i} = B_k \times B_j^{-1}.$$

Ceci montre que (F) peut être aussi associée au système de scalaires tous identiques à l'unité; en vertu du résultat final du paragraphe III, Chapitre III, (F) est semblable à un point dans P.

Je vais construire une variété (C) répondant à la question posée. La condition précédente exprime l'existence, dans k, de solutions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour un système de relations à coefficients dans K, mais non rationnelles (à cause de l'intervention des éléments σ du groupe G). Mais je puis exprimer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en fonction d'éléments de P à l'aide d'une base de k par rapport à P et remplacer ainsi le système de relations en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ par un système de relations rationnelles à coefficients dans P. La condition précédente est donc équivalente à l'existence dans P de solutions pour ce nouveau système, ou encore d'un point de P sur la variété qu'il définit.

De façon précise, dans les relations

$$\sigma(\lambda_i) = \lambda_k \times \lambda_j^{-1} \times a_{\sigma,i},$$

je remplace les λ_i par

$$\lambda_1 = \Theta \frac{x_1}{x_0} + \Theta^2 \frac{x_2}{x_0} + \ldots + \Theta^N \frac{x_N}{x_0},$$

$$\lambda_2 = \Theta \frac{x_{N+1}}{x_0} + \Theta^2 \frac{x_{N+2}}{x_0} + \ldots + \Theta^N \frac{x_{2N}}{x_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_n = \Theta \frac{x_{(n-1)N+1}}{x_0} + \Theta^2 \frac{x_{(n-1)N+2}}{x_0} + \ldots + \Theta^N \frac{x_{nN}}{x_0},$$

et $\sigma(\lambda_1), \sigma(\lambda_2), \ldots, \sigma(\lambda_n)$ par les expressions analogues obtenues en remplaçant Θ par $\sigma(\Theta)$ (Θ désigne comme précédemment un élément primitif du corps K). Je substitue à $\sigma(\Theta)$ son expression en fonction linéaire, à coefficients dans P, de $\Theta, \Theta^2, \ldots, \Theta^N$, puis j'identifie à o les coefficients de $\Theta, \Theta^2, \ldots, \Theta^N$ dans chacune des relations obtenues. Je forme ainsi un système $(\mathfrak{T})$ de relations algébriques homogènes à coefficients dans P entre $x_0, x_1, \ldots, x_{nN}$ qui définit une variété (C) de P sur l'espace (E_{nN}). La condition nécessaire et suffisante précédente est équivalente à l'existence dans P d'une solution en $x_0, x_1, \ldots, x_{nN}$ du système $(\mathfrak{T})$, ou encore à l'existence d'un point de P sur (C).

Cette variété (C) est une variété de Brauer. En effet, je considère le système linéaire en $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_{nN}}{x_0}$,

$$\Theta \frac{x_{(i-1)N+1}}{x_0} + \Theta^2 \frac{x_{(i-1)N+2}}{x_0} + \ldots + \Theta^N \frac{x_{iN}}{x_0} = \frac{u_i}{u_0},$$

$$\sigma(\Theta) \frac{x_{(i-1)N+1}}{x_0} + \sigma(\Theta^2) \frac{x_{(i-1)N+2}}{x_0} + \ldots + \sigma(\Theta^N) \frac{x_{iN}}{x_0} = \frac{u_k}{u_j} a_{\sigma,i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad \sigma \text{ élément de G}).$$

Ce système peut être décomposé en un ensemble de n systèmes à N inconnues dont chacun a pour déterminant le discriminant de Θ, donc est résoluble. J'exprime ainsi $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_{nN}}{x_0}$, en fonctions rationnelles à coefficients dans K

de $u_1, u_2, \ldots, u_n$; ces expressions constituent une représentation unicursale propre $(\mathcal{C})$ de (C), puisque $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0}$ peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles à coefficients dans K de $x_0, x_1, \ldots, x_{nN}$. De plus cette représentation est une représentation de Poincaré, car il est facile de constater que ni $(\mathcal{C})$ ni son inverse $(\mathcal{C})^{-1}$ n'ont de points critiques.

Si je remplace le corps de base P par une extension finie et séparable P', je puis choisir pour corps de comparaison k un corps contenant P' et la condition

$$\sigma(\lambda_i) \times \lambda_j = \lambda_k \times a_{\sigma,i}$$

reste valable à condition de considérer seulement les éléments σ du groupe de Galois G' de k par rapport à P' (et non plus par rapport à P). La condition ainsi obtenue est équivalente à l'existence d'un point de P' sur (C).

J'en déduis que :

La variété (C) *est semblable dans* P *à* (F).

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une extension P' de P soit corps de représentation de (F) est qu'il existe des points de P' sur (C), donc encore que P' soit corps de représentation de (C). Le dernier résultat du paragraphe précédent montre que cette condition entraîne la similitude de (F) et de (C).

Le second théorème de Nœther-Poincaré peut maintenant être généralisé de la façon suivante :

Une variété de Brauer (F) *de* P *de dimension r est semblable dans* P *à une variété* (C) *définie par un système de la forme*

$$\sigma(\lambda_i) \times \lambda_j = \lambda_k \times a_{\sigma,i},$$

dans un corps k dont le degré divise $r+1$.

C'est une conséquence directe d'une propriété des corps de représentation établie au paragraphe I de ce chapitre et des résultats qui viennent d'être établis.

IV. — Cas cyclique.

Je donne quelques précisions sur les variétés de Brauer qui admettent un *corps de représentation relativement cyclique par rapport au corps de base* P. La variété semblable (C), construite au paragraphe précédent, se simplifie dans ce cas, et je l'utiliserai dans les applications du Chapitre V.

Je suppose que le corps k soit une extension normale et cyclique de P; j'en choisis un élément primitif θ; et je désigne par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ ses conjugués

que je classe dans un ordre tel que l'élément σ_1 du groupe de Galois G qui transforme θ en θ_1 soit un élément primitif de G et que l'élément σ_i de G qui transforme θ en θ_i soit la $i^{\text{ième}}$ puissance de σ_1. En particulier, $\sigma_n = \sigma_1^n$ est l'élément unité de G.

Les relations de compatibilité exigent que

$$\sigma_1(A_1) = A_2 \times A_1^{-1} \times a_{1,\sigma_1},$$

où a_{1,σ_1} est un scalaire de k. Les matrices A_i ne sont définies qu'à la multiplication près par un scalaire de k; je puis donc choisir pour matrice A_2 la matrice $A_2 = \sigma_1(A_1) \times A_1$. De même A_3 doit vérifier la relation

$$\sigma_1(A_2) = A_3 \times A_1^{-1} \times a_{2,\sigma_1},$$

et je puis choisir pour A_3 la matrice

$$A_3 = \sigma_1^2(A_1) \times \sigma_1(A_1) \times A_1 = \sigma_2(A_1) \times \sigma_1(A_1) \times A_1.$$

De façon générale, je puis choisir

$$A_i = \sigma_{i-1}(A_1) \times \sigma_{i-2}(A_1) \times \ldots \times \sigma_1(A_1) \times A_1 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Mais la matrice A_n, qui représente l'homographie identique, est un scalaire

$$\sigma_{n-1}(A_1) \times \sigma_{n-2}(A_1) \times \ldots \times \sigma_1(A_1) \times A_1 = a.$$

C'est, *a priori*, un élément de k. Mais une permutation circulaire des facteurs ne change pas la valeur de ce produit de sorte que, pour tout i,

$$\begin{aligned}\sigma_i(a) &= \sigma_1^{n+i-1}(A_1) \times \sigma_1^{n+i-2}(A_2) \times \ldots \times \sigma_1^{i+1}(A_1) \times \sigma_1^i(A_1), \\ &= \sigma_{i-1}(A_1) \times \sigma_{i-2}(A_1) \times \ldots \times A_1 \times \sigma_{n-1}(A_1) \times \ldots \times \sigma_i(A_1) = a;\end{aligned}$$

donc d'après le critère de Galois, a est scalaire de P.

D'autre part, si $i + j \leqq n$,

$$\sigma_j(A_i) = \sigma_1^{i+j-1}(A_1) \times \sigma_1^{i+j-2}(A_1) \times \ldots \times \sigma_1^i(A_1) = A_k \times A_i^{-1};$$

le scalaire a_{i,σ_j} est égal à 1. Si $n < i + j \leqq 2n$,

$$\begin{aligned}\sigma_j(A_i) &= \sigma_1^{i+j-1}(A_1) \times \sigma_1^{i+j-2}(A_1) \times \ldots \times \sigma_1^i(A_1) \\ &= \sigma_{i+j-n-1}(A_1) \times \sigma_{i+j-n-2}(A_1) \times \ldots \times A_1 \times \sigma_{n-1}(A_1) \times \ldots \times \sigma_j(A_1) = A_k \times a \times A_i^{-1};\end{aligned}$$

le scalaire a_{i,σ_j} est égal à a. Le système de scalaires associé dans P à (F) est, en tout cas, déterminé par le seul scalaire a de P.

J'en déduis que :

Pour que (F) *soit semblable dans* P *à un point, il faut et il suffit qu'il existe un élément* λ *de* k *dont la norme relative par rapport à* P *soit égale à* a.

La variété (F) *est semblable dans* P *à la variété définie par la relation*

$$N(\lambda) = a,$$

où $N(\lambda)$ *désigne la norme de* λ *par rapport à* P.

En reprenant le même calcul que pour les matrices A_i, je vois que les relations définissant la variété se réduisent à

$$\lambda_i = \sigma_{i-1}(\lambda_1)\sigma_{i-2}(\lambda_1)\ldots\sigma_1(\lambda_1)\lambda_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$
$$a = \sigma_n(\lambda_1)\sigma_{n-1}(\lambda_1)\ldots\sigma_1(\lambda_1).$$

Les n premières déterminent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en fonction de λ_1; la dernière est équivalente à $N(\lambda) = a$.

Comme au paragraphe précédent, je puis remplacer cette relation non rationnelle en λ_1 par un système de relations rationnelles à coefficients dans P. J'obtiens une seule relation de degré n, elle définit *une hypersurface de degré n dans l'espace* (E_n), semblable à (F) dans P.

En particulier, si la variété (F) est une courbe, elle admet, comme je l'ai déjà rappelé, un corps de représentation quadratique par rapport à P, donc cyclique par rapport à ce corps. Ce corps peut être engendré par adjonction à P d'un élément θ dont le carré est un nombre b de P.

Dans la relation $N(\lambda) = a$, je remplace λ par l'expression

$$\lambda = \frac{x}{z} + \theta\frac{y}{z};$$

j'obtiens

$$\left(\frac{x}{z} + \theta\frac{y}{z}\right)\left(\frac{x}{z} - \theta\frac{y}{z}\right) = \frac{x^2 - by^2}{z^2} = a,$$

qui définit une conique de Lagrange. Je retrouve ainsi les résultats de la fin du Chapitre I; d'ailleurs les démonstrations du paragraphe actuel sont des généralisations directes de celles du paragraphe VI du Chapitre I.

CHAPITRE V.

CORPS DE BASE PARTICULIERS.

Je vais indiquer comment ces résultats et ces méthodes peuvent être précisés et complétés pour certains corps de base. La théorie des algèbres de Brauer est particulièrement féconde pour les corps de base suivants : *champs de Galois; corps de nombres réels; corps locaux de Hensel; corps de nombres algébriques.*

J'examine chacun de ces cas, je rappelle les propriétés spéciales des algèbres de Brauer dans chacun d'eux et j'indique les conséquences qui en résultent pour les variétés du même nom. Le cas d'un corps de nombres algébriques est

particulièrement important : il comporte la solution des problèmes diophantiens sur les variétés de Brauer dans ces corps et généralisent immédiatement les recherches de Lagrange, Gauss, Hilbert et Poincaré concernant les courbes unicursales et rationnelles.

I. — Champ de Galois.

Le cas le plus simple est celui d'un champ de Galois qui donne lieu au théorème suivant :

Toute variété de Brauer sur un champ de Galois est semblable, dans ce champ, à un point.

C'est une conséquence du théorème de Wedderburn ([20]) : *Tout corps gauche* (O_0) *formé d'un nombre fini d'éléments est un champ de Galois* (commutatif).

Toute algèbre de Brauer (O) sur un champ de Galois P est semblable à son corps de base P. En effet, d'après le théorème général de Wedderburn ([21]) utilisé au Chapitre IV, paragraphe I, (O) est semblable à un corps gauche (O_0); mais il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans (O), et dans le corps gauche (O_0); ce dernier est donc un champ de Galois (commutatif). Le corps (O_0), qui est à la fois algèbre de Brauer sur P et corps commutatif ne peut être que P lui-même : le produit direct de (O_0) et d'un de ces corps de décomposition doit être isomorphe à un anneau complet de matrices sur ce corps; comme ce produit direct est aussi un corps commutatif, c'est l'anneau des matrices d'ordre 1 et (O_0) est confondu avec P. Ainsi toute algèbre de Brauer sur un champ de Galois est isomorphe à un anneau complet de matrices sur ce corps. Les résultats du Chapitre IV, paragraphe II, démontrent alors le théorème énoncé.

Les problèmes d'équivalence des variétés de Brauer dans un champ de Galois se résolvent très facilement : *il n'y a qu'une classe de similitude sur* P; *toutes les variétés de Brauer de même dimension sont équivalentes entre elles dans* P; *il existe des points sur toute variété de Brauer sur* P.

Le problème diophantien dans P *sur chaque variété de Brauer* (F) *de* P *est résoluble*. Pour obtenir effectivement les points sur (F) qui sont dans P, il suffit de faire un nombre fini d'essais, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points sur chaque espace de P.

Je note encore un cas particulier des résultats précédents :

Si $f(x, y)$ *est un polynome à coefficients rationnels entiers, indécomposable suivant un module premier* p, *et si* $f(x, y) = 0$ *représente une courbe unicursale,*

([20]) C'est le théorème 1 de la page 49 des *Algebren*.
([21]) *Voir* la note ([17]) (Chap. IV, § 1).

la congruence $f(x, y) \equiv 0$, $(mod.\ p)$, *a des solutions (dans l'ensemble des entiers rationnels, mod.* p*)* ([22]).

En effet, la congruence

$$f(x, y) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

définit, dans le corps des restes (mod. p), des entiers rationnels, une courbe unicursale, donc une variété de Brauer sur ce corps.

II. — Corps des nombres réels.

Je fais remarquer que les problèmes diophantiens et d'équivalence ne se posent pas dans un corps algébriquement fermé. Dans un tel corps, il existe des points simples sur toute variété et toute variété de Brauer admet une représentation de Poincaré. Il n'y a donc pas lieu d'étudier le cas du corps formé par tous les nombres complexes : il n'existe, dans ce corps, qu'une seule classe de similitude de variétés de Brauer.

Le corps des nombres réels donne lieu au théorème suivant :

Une variété de Brauer sur le corps des nombres réels est semblable, dans ce corps, soit à un point, soit à la conique définie par l'équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Ceci résulte du théorème : *Un corps gauche, qui est algèbre de Brauer sur le corps des nombres réels, est isomorphe soit à* P *soit à l'algèbre des quaternions sur* P ([23]).

Il en résulte que toute algèbre de Brauer sur P est semblable soit à P, soit à l'algèbre des quaternions sur P. Il n'y a donc que deux classes de similitude d'algèbres de Brauer sur P, donc aussi de variétés de Brauer. Enfin, comme la conique d'équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

ne contient aucun point simple réel, elle est nécessairement associée dans P à l'algèbre des quaternions sur P.

Pour reconnaître pratiquement dans quelle classe de similitude se trouve une variété de Brauer donnée (F) de P, on procède de la façon suivante : On choisit, pour corps de représentation de (F) le corps Ω des nombres complexes; c'est une extension quadratique, en particulier, normale et cyclique, du corps de

([22]) Ce théorème particulier a été démontré, par une autre voie, par Siegel et Hasse.
([23]) C'est le théorème 2 de la page 50 des *Algebren*.

base P. On peut donc former une variété de Brauer, définie par une relation de la forme

$$N(\lambda) = a,$$

semblable à (F) dans P, suivant la méthode du paragraphe IV du Chapitre IV.

La condition nécessaire et suffisante pour que (F) *soit semblable à un point dans* P *est que le nombre réel a soit positif.*

En effet, la norme d'un nombre de Ω par rapport à P n'est autre que le module de ce nombre complexe et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel soit le module d'un nombre complexe est qu'il soit positif.

Si a est négatif, (F) est semblable à la conique d'équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

III. — Corps local de Hensel.

Pour les variétés de Brauer sur un corps local de Hensel, j'établis d'abord le théorème :

Une variété de Brauer de dimension r sur un corps local de Hensel P *admet, comme corps de représentation, toute extension de degré* $r+1$ *du corps* P.

C'est une conséquence immédiate du théorème :

Une algèbre de Brauer de rang m^2 *sur un corps local* P, *admet, comme corps de décomposition, toute extension de degré m du corps* P ([24]).

Pour reconnaître si une variété de Brauer (F) de P donnée est semblable à un point, je procède de la façon suivante : D'après le théorème précédent, je puis choisir, comme corps de comparaison k d'un système d'équivalence entre (F) et elle-même, toute extension de degré $r+1$ de P [r étant la dimension de (F)]; je choisis une telle extension normale et cyclique particulière. Je désigne par $\mathfrak{p}$ l'idéal premier (unique) de P et par g le nombre d'éléments du corps P/$\mathfrak{p}$ des restes de P (mod. $\mathfrak{p}$). Une racine primitive d'ordre $(g^{r+1}-1)$ de l'unité engendre une extension normale et cyclique de P, que je choisis pour corps k. Je construis une variété de la forme

$$N(\lambda) = a,$$

semblable dans P à (F), suivant la méthode du paragraphe IV du chapitre IV; [N(λ) étant la norme, par rapport à P, d'un nombre λ de k].

([24]) C'est le théorème 4 *bis* de la page 113 des *Algebren*.

La condition nécessaire et suffisante pour que (F) *soit semblable dans* P *à un point est que l'idéal* (a) *engendré dans* P *par l'élément* a *de* P *soit divisible par* $\mathfrak{p}^{r+1}$.

En effet, la condition de l'énoncé n'est autre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un nombre de k dont la norme, par rapport à P, soit égale à a ([25]).

Cela résout les problèmes diophantiens dans P sur les variétés de Brauer; car on peut ainsi reconnaître si un tel problème, sur une variété donnée (F), est possible et, le cas échéant, former une représentation de Poincaré de (F) dans P. On pourrait encore préciser la répartition des classes de similitude des variétés de Brauer en utilisant les théorèmes qui précisent la répartition des classes de similitude d'algèbres du même nom ([26]). Je me contente de montrer que :

Si une variété de Brauer (F) *sur* P *est indécomposable, dans le corps des restes* $P/\mathfrak{p}$, *elle est semblable, dans* P, *à un point.*

En effet, si a n'est pas divisible par $\mathfrak{p}$, la variété (F) est semblable, dans P, à un point, puisque la condition du théorème précédent est vérifiée dans ce cas. Le corps k, extension finie de P, est aussi un corps local, dont l'idéal premier $\mathfrak{P}$ divise $\mathfrak{p}$. Si a est divisible par $\mathfrak{p}$, donc *a fortiori* par $\mathfrak{P}$, plusieurs des matrices A_i sont diviseurs de zéro dans le corps des restes $k/\mathfrak{P}$ de k, (mod. $\mathfrak{P}$); ces matrices A_i sont irrégulières dans ce corps et définissent des homographies $(\mathfrak{A}_i)$ dégénérées sur (E_r). D'autre part, je puis choisir un système de formules de transformation de $(\mathfrak{F})$ dont un coefficient au moins n'est pas divisible par $\mathfrak{P}$; ce système définit, dans le corps $k/\mathfrak{P}$ une transformation $(\mathfrak{F})_\mathfrak{p}$ l'espace (E_r) en une variété $(G)_\mathfrak{p}$. De même, je puis choisir un système d'équations de (F) dans P dont un coefficient au moins soit entier $\mathfrak{p}$-adique; ce système définit, dans le corps des restes $P/\mathfrak{P}$, une variété $(F)_\mathfrak{p}$. Si la variété $(F)_\mathfrak{p}$ est indécomposable, elle est confondue avec $(G)_\mathfrak{p}$ et admet donc $(\mathfrak{F})_\mathfrak{p}$ comme représentation de Poincaré; ce qui est incompatible avec le fait qu'une homographie $(\mathfrak{A}_i)$ est dégénérée.

IV. — Corps de nombres algébriques.

Enfin, j'envisage le cas où le corps de base est un corps de nombres algébriques. J'obtiens le théorème :

Pour qu'une variété de Brauer (F) *sur un corps* P *de nombres algébriques soit semblable dans* P *à un point, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour toute variété déduite de* (F) *par extension* $\mathfrak{p}$*-adique du corps de base* P.

([25]) C'est le théorème 6 de la page 110 des *Algebren*.
([26]) *Voir* le théorème 3 de la page 112 des *Algebren*.

C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental sur les algèbres de Brauer sur un corps P de nombres algébriques ([27]) :

Pour qu'une algèbre de Brauer (O) sur un tel corps P *soit isomorphe à un anneau complet de matrices sur* P, *il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour toute algèbre déduite de (O) par extension* $\mathfrak{p}$*-adique de son corps de base* P.

Ce théorème permet de reconnaître si (F) est équivalente à un espace de référence, donc de résoudre le problème diophantien sur (F) dans P, en appliquant *un nombre fini de fois* la méthode du paragraphe précédent. En effet, le dernier résultat du même paragraphe montre que la variété (F) est semblable à un point dans l'extension $\mathfrak{p}$-adique $P_{\mathfrak{p}}$ de P pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de P qui vérifient la condition : (F) définit une variété de Brauer (donc indécomposable) dans le corps des restes de $P_{\mathfrak{p}}$, mod. $\mathfrak{p}$, corps qui n'est autre d'ailleurs que le corps des restes de P, mod. $\mathfrak{p}$. Il suffit donc d'appliquer la méthode du paragraphe précédent aux seuls idéaux premiers de P qui ne vérifient pas cette condition. Pour chercher ces derniers idéaux, je commence par remplacer (F) par une variété (C) semblable dans P à (F) et définie par des relations de la forme

$$\sigma(\lambda_i) \times \lambda_j = \lambda_k \times a_{\sigma.i},$$

variété que je forme suivant le procédé du paragraphe III, Chapitre IV. Dans ce même paragraphe, j'ai montré que cette variété (C) est une variété de Brauer, donc indécomposable, en construisant une de ses représentations de Poincaré; mais cette construction n'est possible que grâce aux deux propriétés suivantes, vérifiées par le corps K et le système de scalaires $a_{\sigma.i}$:

1° *le discriminant, par rapport à* P, *d'un élément primitif* (Θ) *du corps* K *est différent de zéro;*

2° *aucune des inconnues* λ_i *n'est identiquement nulle*, c'est-à-dire *qu'aucun des scalaires* $a_{\sigma.i}$ *n'est égal à zéro.*

La variété (C) définit donc une variété de Brauer (indécomposable) dans le corps des restes de P, mod. $\mathfrak{p}$, si ces deux propriétés sont encore vérifiées lorsqu'on remplace P par son corps des restes, mod. $\mathfrak{p}$, et K par l'extension de ce corps des restes engendrée par Θ. La seconde condition est équivalente à $N(a_{\sigma.i}) \not\equiv 0$ [où $N(a_{\sigma.i})$ désigne la norme par rapport à P de $a_{\sigma.i}$]; ce qui remplace une condition sur des nombres de K par une condition sur des nombres de P. La variété (C) définit donc certainement une variété de Brauer (indécomposable) dans le corps des restes de P, mod. $\mathfrak{p}$, pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de P qui ne divisent ni le discriminant de Θ par rapport à P, ni aucun des nombres $N(a_{\sigma.i})$; pour ces idéaux, (C) définit une variété semblable à un point dans l'extension $\mathfrak{p}$-adique de P. Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux

([27]) C'est le théorème 1 de la page 117 des *Algebren*.

premiers de P qui divisent un des nombres précédents; c'est à ces seuls idéaux qu'il suffit d'appliquer la méthode du paragraphe précédent pour reconnaître si (C), donc aussi (F), est semblable dans P à un point.

Le théorème précédent a pour conséquence :

Pour qu'une extension (finie et séparable) P′ de P soit corps de représentation de (F), *il faut et il suffit que toute extension locale de P′ soit corps de représentation de* (F).

Les remarques faites montrent d'ailleurs qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'extensions locales de P qui ne soient pas corps de représentation de (F).

Enfin le théorème fondamental est généralisé par la propriété :

Pour que deux variétés de Brauer (F) *et* (F′) de P *soient semblables entre elles dans* P, *il faut et il suffit que* (F) et (F′) *soient semblables dans toute extension locale de* P.

Ce qui résulte immédiatement du théorème précédent et de la condition de similitude indiquée au paragraphe II du Chapitre IV : pour que (F) et (F′) soient semblables entre elles dans P, il faut et il suffit qu'elles aient les mêmes corps de représentation.

Je signale que, pour reconnaître si (F) et (F′) sont semblables entre elles dans P, il suffit de reconnaître si elles le sont dans *un nombre fini d'extensions* locales de P : les extensions qui ne sont pas corps de représentation, soit pour (F), soit pour (F′).

Exemples.

La variété (F), définie dans l'espace (E_3) par l'équation

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+2x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2-x_2x_3^2-3x_1x_2x_3=bx_0^3$$

est une variété de Brauer, si b est un nombre non nul.

Si Θ, Θ' et Θ'' sont les racines de l'équation (absolument irréductible)

$$\Theta^3-\Theta-1=0$$

et, si Δ est le discriminant (absolu) de Θ, la variété (F) admet la représentation de Poincaré

$$\frac{y_1^2y_2(\Theta'\Theta''^2-\Theta''\Theta'^2)+y_1y_2^2(\Theta''\Theta^2-\Theta\Theta''^2)+by_0^3(\Theta\Theta'^2-\Theta'\Theta^2)}{x_1}$$
$$=\frac{y_1^2y_2(\Theta'^2-\Theta''^2)+y_1y_2^2(\Theta''^2-\Theta^2)+by_0^3(\Theta^2-\Theta'^2)}{x_2}$$
$$=\frac{y_1^2y_2(\Theta''-\Theta')+y_1y_2^2(\Theta-\Theta'')+by_0^3(\Theta'-\Theta)}{x_3}=\frac{\Delta y_1y_2y_3}{x_0};$$
$$\frac{x_1+\Theta x_2+\Theta^2x_3}{y_1}=\frac{x_1+\Theta' x_2+\Theta'^2x_3}{y_2}=\frac{x_0}{y_0}.$$

Si b est un nombre rationnel quelconque, on peut, par un changement de variable simple, se ramener au cas où b est un entier rationnel sans diviseurs cubiques. Dans ce cas, la variété (F) contient des points rationnels si et seulement si la congruence

$$\Theta^3 - \Theta - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } b)$$

a des solutions rationnelles.

Par exemple

pour $b = 1$, la variété (F) admet le point rationnel 1, 0, 0;

pour $b = 5$, la congruence

$$\Theta^3 - \Theta - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } 5)$$

admet 2 pour solution, la variété (F) admet le point rationnel 1, 2, 0;

pour $b = 7$, la congruence

$$\Theta^3 - \Theta - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } 7),$$

admet 5 pour solution, la variété (F) admet le point rationnel 2, 1, 0;

pour $b = 2$, ou 3, ou 13, la congruence

$$\Theta^3 - \Theta - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } b)$$

n'a pas de solutions rationnelles et la variété (F) n'admet pas de points rationnels.

D'autre part, la variété (F) est semblable à un point dans tout corps de congruences, mod. p, pour lequel p ne divise pas b. La variété (F) est semblable à un point dans le corps p-adique, si p ne divise pas b ou si la congruence

$$\Theta^3 - \Theta - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } p^c)$$

a des solutions rationnelles, p^c étant la plus grande puissance de p contenue dans b.

Les calculs concernant ces exemples et d'autres encore seront développés dans un Mémoire ultérieur.

CONCLUSION.

Ainsi que je l'avais annoncé, j'ai résolu les problèmes diophantiens sur les variétés de Brauer, généralisant les résultats de Lagrange, Gauss, Hilbert, Poincaré concernant les courbes unicursales. J'ai résolu accessoirement les problèmes d'équivalence et de similitude entre ces variétés. Ceci appelle d'autres études analogues, dont la plus simple semble être celle des variétés

unicursales générales. Je n'ai pu encore aborder cette étude; je ne connais à ce sujet que l'étude d'un cas très particulier : celui des hypersurfaces du second degré par Hasse ([28]). Il peut sembler étonnant que cette étude soit plus complexe que celle des variétés de Brauer. Pourtant la difficulté est réelle et même d'ordre algébrique autant qu'arithmétique : alors qu'on sait reconnaître (*Géométrie galoisienne*) si une variété définie par un système d'équations à coefficients dans un corps P est une variété de Brauer de ce corps, on ne sait pas reconnaître si une variété donnée de P est unicursale dans P.

En terminant ce Mémoire, je désire remercier tous ceux dont l'intérêt ou l'amitié a soutenu mes efforts durant son élaboration; ils sont responsables pour beaucoup de son achèvement.

([28]) *Journal de Crelle*, t. 152, 1923, p. 129-148 et 205-224; t. 153, 1923, p. 113-130 et 158-162

SUR

LE RÔLE DU POINT A L'INFINI

DANS LA

THÉORIE DES FONCTIONS HARMONIQUES

PAR M. BRELOT.

I. — Introduction.

1. Les problèmes sur les fonctions harmoniques et sousharmoniques ne sont pas tous considérés pour des ensembles ouverts quelconques, mais souvent pour des ensembles *bornés*, ce qui permet alors de traiter à la fois les cas des espaces à $\tau \geqq 2$ dimensions (1). Il y a donc lieu d'examiner ensuite *en toute généralité les extensions aux ensembles ouverts non bornés* en cherchant une présentation précisant mais atténuant les différences entre le cas du plan et celui des espaces supérieurs provenant de la divergence d'allure à l'infini des *fonctions harmoniques fondamentales* $\left\lfloor h(r) = \log \frac{1}{r} \right.$ dans le plan, $h(r) = \frac{1}{r^{\tau-2}}$ pour $\tau \geqq 3$ dim. $\left.\right\rfloor$ et de l'usage de la transformation de Kelvin qui se réduit dans le plan à une simple inversion. C'est ce que nous ferons brièvement en commençant par une *étude sommaire à l'infini des fonctions sousharmoniques*, complétant ainsi les études antérieures au voisinage d'un point supposées connues (2). On considérera *des moyennes sur des sphères* (*cercles*) *à centres et*

(1) *Voir* les articles suivants qui serviront de base et seront utilisés plus ou moins explicitement : *Familles de Perron et problème de Dirichlet* (*Acta Szeged*, t. IX, fasc. III, 1939, p. 133), *noté* AS : *Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques* (*Bull. Sc. Math.*, t. 65, 1941, p. 72), *noté* TA. (Dans TA, il est fait usage au théorème 3 d'un lemme topologique inexact, introduit pour abréger une démonstration qu'on pourra restituer.)

(2) Voir : *Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* (*Act. Sc. et Ind.*, n° 139, 1934); *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (*Journal de Math.*, t. 19, 1940, p. 319); *Sur les ensembles effilés* (*Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, p. 12).

rayons variables, et il s'y rattachera aussitôt des critères pour qu'une fonction sousharmonique dans tout l'espace soit un potentiel de masses ≤ 0 à noyau $h(r)$ (soit exactement, soit à une fonction harmonique ou constante près).

Puisque le *point à l'infini* s'introduit comme un point-frontière, il paraît naturel, surtout en pensant au plan et aux applications à la théorie des fonctions de variable complexe, *de l'introduire même dans les domaines de sousharmonicité*. Si R_τ désigne l'espace euclidien ordinaire à $\tau \geq 2$ dimensions, on notera $\mathcal{R}_\tau$ le *point à l'infini* (et aussi pour abréger, comme pour un autre point, l'ensemble qu'il constitue) qui lui est adjoint pour le rendre compact, formant ainsi l'espace noté $\overline{R_\tau}$. *On définira l'harmonicité et la sousharmonicité sur les ensembles ouverts de* $\overline{R_\tau}$ même contenant $\mathcal{R}_\tau$, de manière à conserver des propriétés fondamentales comme le « principe du maximum », clef des résultats d'unicité. Et c'est ainsi que l'on reprendra pour les étendre, à la fois pour $\tau \geq 2$, les premières grandes questions de la théorie générale : *suites et familles*, dans un exposé modernisé; *problème de Dirichlet* pour ensemble ouvert (d'énoncé unique englobant et généralisant donc les problèmes classiques dits « intérieur » et « extérieur ») et théorie de la mesure harmonique; *représentation potentielle des fonctions sousharmoniques* (*même à l'infini*), étendant les résultats classiques de F. Riesz grâce à un noyau généralisant la fonction harmonique fondamentale.

Enfin on profitera de cette reprise d'exposé pour apporter par ailleurs améliorations et compléments divers (exemple d'un nouveau critère de régularité au n° 14).

On notera : 1° D'_0 et Δ'_0 les domaines de R_τ, où $OM < r$ et $OM > r$, $\Delta''_0 = \Delta'_0 \cup \mathcal{R}_\tau$, enfin $\mathcal{D}$ les domaines D'_0, Δ''_0 de $\overline{R_\tau}$;

2° Σ'_0 la circonférence ou périsphère $OM = r$, σ_τ la longueur ou aire de Σ'_0 dans R_τ, φ_τ le flux de $h(OM)$ à travers Σ'_0 *entrant* dans D'_0 (c'est-à-dire pour normale orientée vers le centre) et qui vaut 2π si $\tau = 2$, $(\tau - 2)\sigma_\tau$ si $\tau > 2$; enfin $\mathfrak{M}'_u(O)$ la moyenne sur Σ'_0 d'une fonction u.

3° $\overline{E}$ et $\overset{*}{E}$ l'adhérence (fermeture) et la fontière dans $\overline{R_\tau}$ d'un ensemble E quelconque.

II. — L'allure à l'infini des fonctions sousharmoniques (dans un ensemble ouvert de R_τ).

2. *Cas harmonique.* — Soit d'abord dans $R_\tau (\tau \geq 2)$, *u harmonique* dans un ouvert $\omega \supset \Delta^R_0$. Rappelons le développement dans Δ^R_0

$$(1) \qquad u(M) = K + \alpha h(OM) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{OM}^n Y_n(P) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{(1)}(P)}{\overline{OM}^{n+\tau-2}} \quad (\tau \geq 2),$$

où les Y_n, $Y_n^{(1)}$ sont des fonctions de Laplace (en particulier trigonométriques)

d'ordre n du point P sur la sphère-unité ($OP = 1$) de R_τ (OP vecteur-unité de OM) (3).

On en déduira directement des propriétés de limitation analogues à celles du voisinage d'un point O (et par le même type de raisonnement) : par exemple la nullité du premier Σ équivaut à la condition que u soit bornée dans un sens « à l'infini »; plus généralement si $\frac{1}{r^s}\mathfrak{M}_u^r(O) \to 0$ (pour $r \to \infty$) ($s > 0$), les Y_n sont nuls dès que $n \geq s$.

On peut aussi être ramené à ce cas du voisinage de O par la transformation de Kelvin : $OM.OM' = 1$, $v(M') = u(M)$ et fonction transformée $w(M') = \frac{v(M')}{\overline{OM'}^{\tau-2}}$ (dont la transformation redonne d'ailleurs u).

Étudions plutôt le développement (1) *pour un point* O_1 *variable* et spécialement les coefficients K et α qu'on notera $K_u(O_1)$, $\alpha_u(O_1)$. Comme

$$\mathfrak{M}_u^r(O) = K_u(O) + \alpha_u(O)h(r), \tag{2}$$

K et α apparaissent comme l'ordonnée à l'origine et la pente de la droite représentant la variation de la moyenne $\mathfrak{M}_u^r(O)$ en fonction de $t = h(r)$.

D'abord *le flux* Φ_u sortant de $D_{O_1}^r$ à travers $\Sigma_{O_1}^r$ *est indépendant* de O_1 et r [pour $\Delta_{O_1}^r \subset \omega$] et vaut $-\alpha_u(O_1)\varphi_\tau$, d'où *l'indépendance en* O_1 de α_u; la nullité de α_u équivaut d'après (2) à l'invariance en r de $\mathfrak{M}_u^r(O)$; et si $\mu_u(O) = \lim_{r\to\infty} \mathfrak{M}_u^r(O)$

$$\begin{cases} \mu_u(O) = K_u(O) \text{ si } \tau \geq 3 \text{ ou si } \tau = 2 \text{ avec } \alpha_u = 0, \\ \mu_u(O) \text{ infini du signe de } \alpha \text{ si } \tau = 2 \text{ et } \alpha_u \neq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Enfin on verra aisément (4) que, si $r > OO_1$:

$$\mathfrak{M}_u^r(O_1) = K_u(O) + \alpha_u h(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{OO_1}^n Y_n(P_1) \qquad (P_1 \text{ correspondant à } O_1) \tag{4}$$

d'où

$$K_u(O_1) = K_u(O) + \sum_{1}^{\infty} \overline{OO_1}^n Y_n(P_1) \tag{5}$$

harmonique en O_1 variable. Soulignons spécialement que :

THÉORÈME 1. — *L'invariance en* O_1 de $K_u(O_1)$ [qui vaut $\mu_u(O_1)$ si $\tau \geq 3$, ou si $\tau = 2$ et $\alpha_u = 0$] *équivaut à la nullité de* $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{OM}^n Y_n(P)$ *pour le développe-*

(3) Pour $OM < \lambda$ fini fixé quelconque, les termes du premier Σ sont majorés en module par les termes d'une série numérique convergente. Pour $OM > \lambda$ fixé $> R$, propriété analogue du second Σ. Ces conditions, ou seulement l'uniformité en P de la convergence des séries, suffisent à assurer l'unicité du développement.

(4) Le second Σ de (1) est de flux nul à travers $\Sigma_{O_1}^r$ ou tout $\Sigma_{O_1}^{r'}$ enveloppant O, donc de moyenne sur $\Sigma_{O_1}^r$ constante en r et tendant vers zéro pour $r \to \infty$, c'est-à-dire nulle.

ment (1) *relatif à tout point* O (*c'est-à-dire à ce que u soit à l'infini borné dans un sens*).

L'invariance de $\mathfrak{M}_u^r(O_1)$ *en* O_1 *et* r [pour $\Delta_0^r \subset \omega$] *équivaut à la double condition que u soit borné à l'infini dans un sens et de flux nul* (*c'est-à-dire que le premier* Σ *et* α_u *soient nuls*) *et u admet alors pour* $M \to \mathcal{R}_\tau$ *une limite égale à cette valeur invariante.*

3. *Cas de u sousharmonique dans* $\omega \supset \Delta_0^R$. — D'abord $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est fonction convexe de $h(r) = t$, donc pour t croissant (à partir de $t = 0$ pour $\tau \geq 3$, de $t = -\infty$ pour $\tau = 2$) croissante, décroissante ou d'abord décroissante, puis croissante (5) et admet quand $r \to \infty$ une limite $\mu_u(O)$ qui pour $\tau \geq 3$ est toujours $\neq -\infty$ (6).

Étudions en fonction de O cette *courbe des moyennes en t*. Considérons, sortant de D_0^r, les flux généralisés f_i et f_e de F. Riesz (7) qui valent les produits par $-\varphi_\tau$ des dérivées respectives à droite et à gauche en t de $\mathfrak{M}_u^r(O)$. Ces dérivées admettent pour $r \to \infty$ *une même limite* α_u, déjà rencontrée dans le cas harmonique et *qui vaut en général* :

pour $\tau \geq 3$, $-\infty$ si $\mu_u(O) = +\infty$ ou la pente initiale ($< +\infty$) de la courbe en t, soit

$$\lim_{r \infty} \frac{\mathfrak{M}_u^r(O) - \mu_u(O)}{h(r)};$$

pour $\tau = 2$, la pente de la direction asymptotique ($< +\infty$), soit

$$\lim_{r \infty} \frac{\mathfrak{M}_u^r(O)}{h(r)}$$

ou, pour résumer, *toujours la pente initiale de la courbe en t* (d'ailleurs $< +\infty$).

La limite Φ_u *des flux considérés, pour* $r \to \infty$, *est indépendante* de O, à cause de la croissance du flux quand on passe d'une sphère à une autre quelconque qui

---

(5) Notions de croissance et décroissance prises toujours au sens *large* (avec signes $\geq$, $\leq$), donc constance incluse.

(6) Soulignons en passant que pour u sousharmonique dans le domaine ($r_1 < OM < r_2$), la condition que $\mathfrak{M}_u^r(O)$ soit *linéaire en* $h(r)$ ($r_1 < r < r_2$) *équivaut à l'harmonicité* de u dans le domaine. Car en retranchant $K + \alpha h(OM)$ convenable, on se ramène au cas de $\mathfrak{M}_u^r(O)$ constant. Considérons alors la fonction de Wiener $H_u = \Phi_\rho$ dans le domaine ($r_1 < r_1' < OM < \rho < r_2$). On a

$$\mathfrak{M}_{\Phi_\rho}^r(O) = \mathfrak{M}_u^{r_1'}(O).$$

Quand ρ croît, Φ_ρ croît et l'invariance de $\mathfrak{M}_{\Phi_\rho}^r(O)$ en ρ exige la constance de Φ_ρ en ρ en chaque point. On en déduit $u = \Phi$. On pourrait aussi se servir de l'interprétation potentielle et du flux.

(7) On prend $\Sigma_0^{r_1}(r_1 < r)$ et la fonction de Wiener pour l'intersphère et valeurs-frontières u (c'est-à-dire la meilleure ou plus petite majorante harmonique); le flux de celle-ci *sortant* de $\Sigma_0^{r_2}(r_1 < r_2 < r)$ a comme limite f_i quand $r_1 \to r$. De même pour f_e avec $\Sigma_0^{r_1'}(r_1' > r)$.

Sur la courbe en t, la corde $[h(r_1), h(r_2)]$ correspond à la moyenne relative à la majorante précédente dans l'intersphère (r_1, r_2).

l'enveloppe. On l'appellera *flux à l'infini* (ou en $\mathcal{R}_\tau$). *Ainsi* $\Phi_u = -\varphi_\tau \alpha_u$ *et* α_u *est indépendant de* O.

Introduisons encore $K_u(O)$ limite commune pour $r \to \infty$ de

$$\mathfrak{M}_u^r(O) - \alpha_u h(r)$$

et de

$$\mathfrak{M}_u^r(O) - \varphi h(r),$$

où φ désigne la pente à droite ou à gauche de la courbe en t des $\mathfrak{M}_u^r(O)$.

On voit que $K_u(O)$ *vaut* $\mu_u(O)$ *si* $\tau \geq 3$ *et dans le plan, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de la courbe en* t, y *compris* $-\infty$ *en cas de branche parabolique* [donc encore $\mu_u(O)$ si $\alpha_u = o$].

Dans le plan une inversion de pôle O conserve harmonicité et sousharmonicité, et le flux; les courbes des moyennes en t des fonctions correspondantes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $\tau \geq 3$ *la transformée de Kelvin* (de pôle O) de u sousharmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ (ce point exclus) est une fonction sousharmonique v au voisinage de O (exclus). Comparant les deux courbes en t des moyennes sur Σ_0^r, on voit que *l'ordonnée initiale* $\mu_u(O)$ *de la première vaut la pente de la direction asymptotique de la deuxième et que la pente initiale* α_u *de la première vaut l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de la deuxième.*

THÉORÈME 2. — *a. L'existence d'une majorante harmonique au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$ [8] *équivaut à la condition :* $\mu_u(O)$ *fini si* $\tau \geq 3$, α_u *fini si* $\tau = 2$;

b. $\mu_u(O)$, $K_u(O)$ *sont partout soit infinies de signe déterminé, soit harmoniques;*

c. Si $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} u < +\infty$, $\mu_u(O)$ *lui est égale. Si* $\mu_u(O)$ *est finie et invariante pour* O *variable,* $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} u$ *lui est égale* [9].

(*a*) se vérifie par la transformation de Kelvin et le résultat analogue de l'étude locale déjà connue, mais se démontre aussi très facilement de manière directe [10].

(*b*) résulte de *a.* lorsqu'il n'y a pas de majorante harmonique. S'il y en a, on

---

[8] C'est-à-dire par exemple dans tout $\Delta_{O_1}^{R_1}$ avec O_1 fixe quelconque et R_1 alors assez grand. On pourra introduire la plus petite majorante harmonique et son développement (1), d'où des *propriétés de limitation* comme au voisinage d'un point O.

[9] *Dans le cas du plan* on complètera comme suit : α. La condition : $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} \frac{u}{\log OM}$ fini (d'où l'égalité à $-\alpha_u$) équivaut à l'existence d'une majorante harmonique v au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ avec invariance de $K_v(O)$ (et alors invariance pour toute majorante). Cas particulier : $K_u(O)$ fini invariant.

β. La condition $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} \frac{u}{\log OM} \leq o$ équivaut à $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} u < +\infty$ et aussi et à l'existence d'une majorante harmonique v au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ avec $\alpha_v \geq o$ et invariance de $K_v(O)$ (et alors invariance pour toute majorante avec $\alpha \geq O$). Cas particulier : $\mu_u(O)$ fini invariant.

[10] Grâce à l'interprétation des cordes de la courbe (convexe) des moyennes.

introduira la plus petite majorante v_R dans $\Delta^R_{O_1}$ (O_1 fixé) ([11]) et l'on remarquera que $\mu_{v_R}(O)$ et $K_{v_R}(O)$ qui sont harmoniques en O sont fonctions de R décroissantes et tendant (pour $R \to \infty$) vers $\mu_u(O)$ et $K_u(O)$.

(*c*) en première partie, résulte encore d'une transformation de Kelvin ([12]). Supposons $\mu_u(O)$ finie et invariante. Soit v une majorante harmonique, prise pour $\tau = 2$ égale à la plus petite majorante dans un $\Delta^R_{O_1}$ de sorte que son flux soit ainsi nul. On sait que $\mu_v(O)$ est fini. Donc μ_{u-v} qui vaut $\mu_u - \mu_v$ l'est aussi. Comme $u - v$ est sousharmonique et $\leq o$, μ_{u-v} est invariant en O comme μ_u. Donc aussi $\mu_v(O)$, ce qui entraîne que v; donc u soient bornées supérieurement au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.

Nous reviendrons plus loin (n° 8) sur l'allure à l'infini (avec pseudo-limite) après introduction d'une sousharmonicité à l'infini.

4. *Fonctions sousharmoniques dans* R_τ *entier et potentiels.* — Si u est *harmonique* dans R_τ, elle admet un développement (1) avec α et deuxième Σ nuls. Le premier Σ disparaît, c'est-à-dire qu'elle se réduit à une constante si elle est bornée dans un sens (Picard) ([13]). Plus généralement si $\frac{1}{r^s}\mathcal{M}^r_u(O) \to o(r \to \infty)$ $(s > o)$ elle se réduit à un polynome de degré $< s$.

Si u est *sousharmonique* dans R_τ, $\mathcal{M}^r_u(O)$ est fonction convexe et décroissante de $t = h(r)$ et $\alpha_u \leq o$ (ou $\Phi_u \geq o$). La condition $\alpha_u = o$ équivaut à la constance en r de $\mathcal{M}^r_u(O)$ (pour un point O, donc aussi pour tout point O) et entraîne l'harmonicité ([14]).

Théorème 3. — *Soit u sousharmonique dans* R_τ.

Pour qu'elle y admette une majorante harmonique il faut et il suffit que $\mu_u(O)$ *soit fini* (*pour un* O *ou pour tout* O).

Pour qu'elle soit harmonique il faut et il suffit que $\alpha_u = o$ (ou $\Phi_u = o$).

(Dans le plan les deux propriétés d'être harmonique ou d'admettre une majorante harmonique sont équivalentes.)

Pour qu'elle soit constante, il faut et il suffit que $\alpha_u = o$ *et que u soit bornée supérieurement* ([15]) (la première condition étant inutile dans le plan).

([11]) C'est la limite de la plus petite majorante (ou fonction de Wiener) dans le domaine compris entre $\Sigma^R_{O_1}$ et $\Sigma^\rho_{O_2}$ (O_2 quelconque, $\rho \to +\infty$). Son prolongement par u est sousharmonique dans ω.

([12]) Remarquer aussi que si u est bornée supérieurement, il en est de même pour $\mu_u(O)$ qui est donc constant vu son harmonicité, d'après *b*.

([13]) Ce théorème de Picard s'obtient encore comme suit : Si u est harmonique et $> o$ dans R_τ, les moyennes A_P, A_Q de u dans D^R_P, D^r_Q satisfont, si $D^R_P \supset D^r_Q$ à $R^{\tau-1} A_P \geq r^{\tau-1} A_Q$, d'où $\frac{u(P)}{u(Q)} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^{\tau-1}$ où le second membre peut être arbitrairement voisin de 1.

([14]) Grâce au résultat de la note ([7]).

([15]) Extension des théorèmes classiques de Liouville-Picard. On peut substituer à la seconde condition d'autres moins fortes assurant la constance d'une fonction harmonique, comme : u bornée

Potentiels ([16]). — Soit dans R_τ une distribution m de masses $\leqq 0$, qui soit sur tout compact une mesure classique de Radon. L'intégrale $\int_{D_0^r} h(MP)\,dm(P)$ a pour O et M fixés une limite pour $r \to \infty$, indépendante de O; cette limite fonction de M est partout infinie ou une fonction sousharmonique ([17]) $u(M)$ dite alors *potentiel* de m.

Approfondissons ce cas : 1° $m(D_0^r)$ et $m(\overline{D}_0^r)$ (masses portées par D_0^r, $\overline{D}_0^r$) valent les pentes à droite et à gauche de la courbe en t des moyennes $\mathfrak{M}_u^r(O)$.

Donc *la masse totale* [limite pour $r \to \infty$ de $m(D_0^r)$] *vaut* $\alpha_u \leqq 0$.

2° $\mathfrak{M}_u^r(O) - h(r)m(D_0^r)$ vaut le potentiel en O des masses hors D_0^r, donc tend vers zéro pour $r \to \infty$, c'est-à-dire que $K_u(O) = 0$ quel que soit O.

Cela implique : *si* $\tau \geqq 3$, $\mu_u(O) = 0$ *et* $m(D_0^r)h(r) \to 0$ $(r \to \infty)$;

si $\tau = 2$, α_u (*ou la masse totale*) *est finie*, (autrement dit u admet une majorante harmonique au voisinage de l'infini) ce qu'on peut établir sans la convexité de la courbe des moyennes, par étude directe de l'intégrale-potentiel.

3° Si $\tau \geqq 3$, $u \leqq 0$, $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} u = \mu_u(O) = 0$ et la plus petite majorante harmonique est nulle;

si $\tau = 2$, $\limsup_{M \to \mathcal{R}_\tau} \frac{u}{\log OM} = \alpha_u$.

Ce second point ne semble pas immédiat. Il suffit, grâce à une inversion, de voir que $\frac{u}{\log OM}$ est bornée supérieurement à l'infini puis de considérer seulement le potentiel v des masses hors $\overline{D}_0^1$. On considérera la couronne $(1 < OM < r)$ $(r \to \infty)$ dont on fera le balayage. Les masses hors D_0^r donnent en tout point fixé un potentiel tendant vers zéro, celles balayées sur Σ_0^1 donnent en O un potentiel nul; celles balayées sur Σ_0^r donnent donc un potentiel tendant vers $v(O)$ en O, par suite tendant en tout point fixé vers ce même $v(O)$.

---

dans un sens non précisé, $\mathfrak{M}_u^r(O)$ bornée en r pour *un* point O (cette dernière condition entraînant encore dans le plan que $\alpha = 0$).

L'énoncé plan (sans intervention de α_u) est bien connu. Dans l'espace signalons sur la recherche de la constance s'il y a borne supérieure, des travaux de Privaloff et Keldych introduisant d'autres conditions supplémentaires que $\alpha_u = 0$ comme la continuité et l'absence de minimum. *Voir* KELDYCH : *Sur le théorème de Liouville pour les fonctions sousharmoniques* (*Recueil Math. de Moscou*, nouvelle série, t. 2, 1937, p. 369).

([16]) On reprendra cette notion sous une forme plus générale au n° 19.

([17]) Ce cas est caractérisé par la propriété que l'intégrale $\int h(OP)\,dm(P)$ est *bornée* lorsqu'on l'étend à un domaine $(r_1 < OP < r_2)$ pour O et r_1 fixés, r_2 arbitraire.

En P hors $\overline{D}_0^1$, le nouveau potentiel a une limite (plus petite majorante harmonique de v sur Δ_0^1) visiblement majorée par

$$v(O) + \log(OP - 1) \times |\text{masse totale}|,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 4. — *Pour que u sousharmonique dans R_τ soit un potentiel de masses $\leqq 0$, il faut et il suffit que $K_u(O) = 0$ quel que soit O.*

Il reste à montrer la suffisance. Or soit m la distribution de masses $\leqq 0$ obtenue localement par la représentation potentielle selon F. Riesz. Sur un domaine borné δ quelconque, son potentiel vaut u à une fonction harmonique près, de sorte que $m(D_0^r)$ vaut la pente à droite de la courbe en t des $\mathfrak{M}_u^r(O)$; on sait même que $u(M) = \int_\delta G_\delta(M, P)\, dm(P) + w(M)$ où G_δ est la fonction de Green de δ et w la plus petite majorante harmonique égale ici à la fonction de Wiener pour δ et u. D'après cela

$$\begin{aligned} u(O) &= \int_{D_0^r} [h(OP) - h(r)]\, dm(P) + \mathfrak{M}_u^r(O) \\ &= \int_{D_0^r} h(OP)\, dm(P) + \mathfrak{M}_u^r(O) - h(r)\, m(D_0^r). \end{aligned}$$

L'hypothèse $K_u(O) = 0$ montre que

$$\int_{D_0^r} h(OP)\, dm(P) \underset{(r \to \infty)}{\to} u(O).$$

On conclut aisément que m admet bien un potentiel et que celui-ci vaut u.

COROLLAIRES. — 1° *Pour que u sousharmonique dans R_τ soit un potentiel à une fonction harmonique près, il faut et il suffit que* $K_u(O)$ soit fini (en un point, donc en tous), ce K_u étant alors une fonction harmonique et, si $\tau \geqq 3$, la plus petite majorante harmonique.

2° *Pour que u sousharmonique dans R_τ soit un potentiel à une constante près, il faut et il suffit que $K_u(O)$ soit fini et invariant* en O, sa valeur étant celle de la constante,

ou qu'en *un* point O, $K_u(O)$ soit fini et que $\dfrac{\mathfrak{M}_u^r(O)}{r^s} \to 0$ $(r \to \infty)$ pour un s (ou tout s) tel que $(0 < s \leqq 1)$,

ou encore simplement si $\tau \geqq 3$ que u [ou même seulement $\mathfrak{M}_u^r(O)$ pour un O] soit bornée supérieurement (18).

---

(18) Dans le plan, la condition $\limsup_{M \to \mathcal{C}_\tau} \dfrac{u}{\log OM} < +\infty$ n'est pas suffisante, même pour que u soit un potentiel à une fonction harmonique près. On obtient un contre-exemple par une fonction [dans $(-\infty, +\infty)$] de la variable t $\left(\text{qu'on remplacera par } \log \dfrac{1}{OM}\right)$, convexe décroissante dont la branche de gauche a une pente asymptotique finie mais est parabolique.

III. — Étude dans $\overline{R_\tau}$. Harmonicité et sous-harmonicité à l'infini. Premières propriétés.

5. *Définition. — Dans un ensemble ouvert* ω *de* $\overline{R_\tau}$ *contenant* $\mathcal{R}_\tau$, *une fonction u sera dite sousharmonique si :*

A. *Elle l'est sur* $\omega - \mathcal{R}_\tau$ *au sens habituel;*

B. *et si elle est au point* $\mathcal{R}_\tau$:

a. $< +\infty$;

b. semi-continue supérieurement;

c. de valeur $u(\mathcal{R}_\tau)$ *majorée par* $\mathfrak{M}_u^r(O)$ *pour* O *fixé arbitrairement et r alors assez grand.*

(B) peut être remplacée par : $u(\mathcal{R}_\tau) = \limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau,\, M \to \mathcal{R}_\tau} u < +\infty$ et $\Phi_u \leqq 0$ (cette condition en Φ_u étant le plan conséquence des autres); et alors $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est fonction décroissante de r [pour $\Delta_0^r \subset \omega$] et tend vers $u(\mathcal{R}_\tau)$.

Exemple : $h(PM)$ (P fixé $\neq \mathcal{R}_\tau$) est sousharmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.

α. *Critères de « prolongement sousharmonique à l'infini ».* — Par exemple : u sousharmonique dans $\omega - \mathcal{R}_\tau$ n'est « sousharmonique en $\mathcal{R}_\tau$ », c'est-à-dire prolongeable sousharmoniquement dans ω (et de manière unique) que si u est bornée supérieurement à l'infini et $\Phi_u \leqq 0$; et si, de plus, u est harmonique dans $\omega - \mathcal{R}_\tau$, son prolongement est donné par le développement (1) au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ avec $\alpha \geqq 0$ et premier Σ nul.

β. *Premières propriétés de u sousharmonique dans* ω *ouvert quelconque de* $\overline{R_\tau}$. — Il n'y a de maximum en un point qu'en cas de constance au voisinage. La borne supérieure :

1° n'est atteinte dans un *domaine* qu'en cas de constance ;

2° est toujours égale à la borne supérieure des lim sup à la frontière si celle-ci existe.

Si u est sousharmonique dans $\overline{R_\tau}$ entier, elle est constante.

L'enveloppe supérieure de deux fonctions sousharmoniques est sousharmonique.

Soit $\omega \subset \overline{R_\tau}$ et ω' son inverse de pôle O (hors ω) et puissance 1. Dans le plan l'inversion simple fait correspondre les fonctions sousharmoniques sur ω et ω'. Pour $\tau \geqq 3$ la transformation de Kelvin (définie hors des points inverses O et $\mathcal{R}_\tau$) transforme u sousharmonique dans ω, valant K (nécessairement fini) en $\mathcal{R}_\tau$ en la somme de $Kh(OM')$ et d'une fonction sousharmonique u' dans ω' (c'est-à-dire sousharmonique dans $\omega' - O$, mais prolongeable sousharmoniquement dans ω') avec $u'(O) = \alpha_u \geqq 0$ et flux nul de u' en O; mais elle ne trans-

forme une fonction sousharmonique $v(M')$ dans ω' en la somme d'une fonction sousharmonique dans ω et d'une fonction $\beta h(OM)$ que si la courbe en $t = h(r)$ de $\mathcal{M}_v^r(O)$ n'a pas de branche parabolique (pour $t \to +\infty$); noter que si $v(O)$ est fini $\geqq 0$, la transformée sera sousharmonique nulle en $\mathcal{R}_\tau$.

Notions analogues pour la *surharmonicité*. Par conjonction, définition et propriétés de l'*harmonicité*, d'ailleurs aisée à étudier directement.

Ainsi u sera harmonique dans ω contenant $\mathcal{R}_\tau$ si elle est harmonique dans $\omega - \mathcal{R}_\tau$ et, en $\mathcal{R}_\tau$, finie continue, égale à $\mathcal{M}_u^r(O)$ [pour O fixé quelconque et r alors assez grand, ou encore quel que soit $\Delta_0'^r \subset \omega$]. Cette condition au point $\mathcal{R}_\tau$ revient à supposer dans le développement (1) que α et le premier Σ sont nuls.

On soulignera pour ω quelconque de $\overline{R_\tau}$:

1° si u est sousharmonique et h harmonique et si à la frontière non vide, $\limsup(u - h) \leqq 0$, alors $u \leqq h$ dans ω;

2° si u harmonique tend vers o en tout point de la frontière non vide, $u = 0$.

6. *Extension de l'intégrale de Poisson.* — A côté de l'intégrale de Poisson (qui sera dite aussi intégrale - $\mathcal{P}$) pour un D_0^R et une fonction sur Σ_0^R, on introduira une intégrale - $\mathcal{P}$ pour $\Delta_0'^R$ et f (sommable - σ sur Σ_0^R), qui sera la fonction dans $\Delta_0'^R$ égale à

$$(6) \qquad \mathcal{P}(M) = \frac{1}{\alpha_\tau R} \int_{\Sigma_0^R} f(P) \left[\frac{\overline{OM}^2 - R^2}{\overline{MP}^\tau} - \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}} + \frac{1}{R^{\tau-2}} \right] d\sigma_P,$$

où le crochet est pris égal à $\frac{1}{R^{\tau-2}}$ pour M en $\mathcal{R}_\tau$, donc toujours > 0 et se simplifiant d'ailleurs pour $\tau = 2$.

On verra que $\mathcal{P}(M)$ est harmonique dans $\Delta_0'^R$ et tend vers $f(P)$ aux points de continuité de f. Il serait banal d'introduire et d'étudier une intégrale étendue de Poisson-Stieltjes.

Remarque. — Si u est sousharmonique dans $\omega \supset \overline{D_{M_0}^r}$, on sait qu'elle est majorée dans $D_{M_0}^r$ par l'intégrale - $\mathcal{P}$ correspondante et lui est égale si u est harmonique dans $D_{M_0}^r$. Il en sera *de même* avec $\Delta_{M_0}'^r$. L'égalité se voit en considérant $\mathcal{M}_u^\rho(M_0)$ qui est continue pour $\rho = r$.

Inégalités. — Si $f \geqq 0$, les inégalités de Harnack s'étendent selon

$$(6) \qquad \left[\frac{OM - R}{(OM + R)^{\tau-1}} - \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}} + \frac{1}{R^{\tau-2}} \right] R^{\tau-2} \mathcal{P}(\mathcal{R}_\tau) \leqq$$

$$\leqq \mathcal{P}(M) \leqq \left[\frac{OM + R}{(OM - R)^{\tau-1}} - \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}} + \frac{1}{R^{\tau-2}} \right] R^{\tau-2} \mathcal{P}(\mathcal{R}_\tau).$$

On en déduira l'extension suivante d'un résultat classique pour un domaine borné :

Pour toute fonction harmonique $u > 0$ dans le *domaine* ω de $\overline{R_\tau}$ le rapport des valeurs de u en deux points variables d'un ensemble compact de ω est compris entre deux nombres positifs *indépendants* de u.

6 *bis*. *Laplaciens et flux généralisés*. — Soit la fonction f définie au voisinage d'un point M_0 d'abord différent de $\mathcal{R}_\tau$ et sommable - σ sur $\Sigma^r_{M_0}$ (pour tout r assez petit) ou sommable au sens large mais finie en M_0. Introduisons les paramètres analogues à ceux de Privaloff ([18 bis])

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_f(M_0) &= \limsup_{r\to 0}\\ \underline{P}_f(M_0) &= \liminf_{r\to 0}\end{aligned}\right\} \frac{2\tau}{r^2}\,[\mathfrak{M}^r_f(M_0) - f(M_0)]$$

qui, comme ceux de Privaloff, coïncident avec le laplacien ordinaire lorsque f admet des dérivées secondes finies continues.

On fera l'extension au point $\mathcal{R}_\tau$ en considérant les deux limites pour $r \to \infty$ de $2\tau r^2[\mathfrak{M}^r_f(O) - f(\mathcal{R}_\tau)]$ où O est *un point fixé*. Laissant de côté ici plus de développements, indiquons brièvement qu'en adaptant des raisonnements de Blaschke-Privaloff on trouve :

Pour que u dans le domaine ω de $\overline{R_\tau}$ soit $-\infty$ ou sousharmonique, il faut et il suffit qu'elle soit $< +\infty$, semi-continue supérieurement et qu'en tout point où elle est finie, $P_u \geqq 0$.

On se ramène à voir que u est majorée par l'intégrale - $\mathfrak{T}$ relative à un domaine $\mathcal{D}$ et sur $\overset{*}{\mathcal{D}}$ une fonction φ finie continue majorant u. On considérera pour cela $v = u - \mathfrak{T} + \varepsilon w\,(\varepsilon > 0)$ où w est une fonction auxiliaire dans $\overline{\mathcal{D}}$, finie continue, $\leqq 0$ sur $\overset{*}{\mathcal{D}}$ et admettant un $\overline{P_w} > 0$ dans $\mathcal{D}$. Alors v qui est $\leqq 0$ sur $\overset{*}{\mathcal{D}}$ l'est dans $\mathcal{D}$, sinon y admettrait un maximum où $\overline{P_v}$ serait > 0 (ce qui est contraire aux propriétés évidentes du $\overline{P_v}$).

Reprenons d'autre part la notion de *flux généralisé* (selon F. Riesz). Plaçons-nous dans $\overline{R_\tau}$, mais ne considérons pour simplifier, que des surfaces sphériques. Soit u sousharmonique dans ω et $\overline{\mathcal{D}} \subset \omega$. On considérera une surface sphérique concentrique Σ située dans $\mathcal{D}$ et la fonction de Wiener pour l'intersphère avec valeurs-frontière u. Elle admet à travers une sphère intermédiaire et pour la normale dirigée dans le sens de $\overset{*}{\mathcal{D}}$ vers $\mathcal{D}$ un certain flux. Vu l'interprétation

---

([18 bis]) Ceux de Privaloff (encadrés par les nôtres) sont relatifs à une moyenne *spatiale* dans D'_M avec remplacement de $\frac{2\tau}{r^2}$ par $2\,\frac{\tau+2}{r^2}$, f étant sommable en volume au voisinage de M_0, ou sommable au sens large mais finie en M_0.

L'énoncé qui suit améliore le critère analogue de Szpilrajn avec moyennes spatiales, outre l'extension relative à $\mathcal{R}_\tau$.

sur la courbe des moyennes, ce flux a une limite quand Σ tend vers $\mathcal{D}$. Ce sera le *flux généralisé relatif* à $\mathcal{D}$. De même, en prenant une surface sphérique concentrique hors $\overline{\mathcal{D}}$, on définirait à la limite *un flux généralisé relatif* à $\overline{\mathcal{D}}$.

Nous voulons souligner qu'*une fonction sousharmonique dans* ω *est déterminée à une fonction harmonique près par ses flux relatifs aux* $\overline{\mathcal{D}}$ *contenus dans* ω (ou encore par les flux relatifs aux $\mathcal{D}$ dont l'adhérence est contenue dans ω). Autrement dit, si u et v sont sousharmoniques dans ω et de mêmes flux précédents, $u - v$ vaut, là où elle est définie, une fonction harmonique dans ω.

En effet pour M_0 fixé et r assez petit, $\mathfrak{M}_u^r(M_0)$ et $\mathfrak{M}_v^r(M_0)$ ont mêmes dérivées, finies, en r ou t à droite ou à gauche, donc diffèrent d'une constante. Ainsi $\mathfrak{M}_{u-v}^r(M_0)$ est constante et vaut donc sa limite pour $r \to 0$, soit $u(M_0) - v(M_0)$ si cette différence a un sens (ce qui entraîne qu'elle soit alors finie). De même, par suite, pour la moyenne spatiale. Par médiation spatiale de $u - v$ à rayon constant, on obtient hors $\mathcal{R}_\tau$ une fonction égale quasi-partout à $u - v$ mais aussi harmonique. Ainsi dans ω hors $\mathcal{R}_\tau$, $u - v$ vaut quasi-partout w harmonique. Voyons, si $\mathcal{R}_\tau \in \omega$, que w se prolonge harmoniquement en $\mathcal{R}_\tau$ en y prenant la valeur $u - v$ lorsque celle-ci a un sens. Supposons d'abord $\tau \geq 3$. Alors $\mathfrak{M}_{|u|}^r(O)$ et $\mathfrak{M}_{|v|}^r(O)$ sont bornés pour $r \to \infty$, donc aussi $\mathfrak{M}_{|w|}^r(O)$; cela exige que dans le développement (1) de w à l'infini, le premier Σ soit nul; le coefficient α est nul aussi puisque u et v ont même flux à l'infini; d'où le prolongement de w. Il doit valoir en $\mathcal{R}_\tau$, $\lim_{r\infty} \mathfrak{M}_w^r(O)$ ou [puisque $\lim_{r\infty} \mathfrak{M}_u^r(O)$ et $\lim_{r\infty} \mathfrak{M}_v^r(O)$ sont finies et valent $u(\mathcal{R}_\tau)$ et $v(\mathcal{R}_\tau)$] la différence $u - v$. On conclut aussitôt. Démonstration analogue pour $\tau = 2$ en considérant $\frac{u}{h(OM)}$ et $\frac{v}{h(OM)}$.

7. *Ensembles polaires et effilés.* — On dira qu'un ensemble E de $\bar{R}_\tau$ y est *polaire* s'il possède la propriété locale que pour tout point M de $\bar{R}_\tau$ (19), il existe un voisinage ouvert ω et une fonction sousharmonique dans ω valant $-\infty$ sur $E \cap \omega$.

Il faut noter que le point $\mathcal{R}_\tau$ ne forme un ensemble polaire que si $\tau = 2$. Si $\tau > 2$, un ensemble contenant $\mathcal{R}_\tau$ n'est pas polaire.

Je laisse de côté les démonstrations assez faciles (20) des propriétés suivantes :

a. Une inversion de pôle O (qui fait correspondre O et $\mathcal{R}_\tau$) transforme un

(19) Ou même « tout point M de E » comme il résulte de l'étude ultérieure et d'un recouvrement dénombrable.

(20) On utilisera le lemme suivant : s'il existe au voisinage d'un point O une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur E (ne contenant pas O), il en existe une, analogue, finie en O. C'est immédiat si O n'est pas adhérent à E. On passe au cas général par sommation et décomposition dénombrable de E (grâce aux propriétés de convergence des suites décroissantes des fonctions sousharmoniques).

ensemble polaire E en un ensemble polaire, à condition, si $\tau > 2$, que E ne contienne pas O.

b. La définition de polarité équivaut à dire que $E \cap R_\tau$ est polaire dans R_τ au sens antérieurement connu ([21]) à condition, si $\tau > 2$, que E ne contienne pas $\mathcal{R}_\tau$.

c. Soit dans ω ouvert (de $\overline{R_\tau}$) un ensemble α polaire fermé dans ω. Toute fonction u sousharmonique dans $\omega - \alpha$; bornée supérieurement au voisinage de tout point de α est prolongeable sousharmoniquement dans ω et de manière unique; et si u est harmonique dans $\omega - \alpha$ *et bornée* ([21 bis]) *au voisinage de tout point* de α, le prolongement est harmonique dans ω.

d. Soit ω ouvert différent de $\overline{R_\tau}$ et contenant E. Pour que E soit polaire, il faut et suffit qu'il existe dans ω une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur E.

e. Toute réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire.

Un ensemble sera dit *intérieurement polaire*, si toute partie compacte est polaire. On dira *quasi-partout* ou *à peu près partout* dans le sens de « sauf sur un ensemble polaire, respectivement, intérieurement polaire » ([22]).

Une fonction dans un ensemble ouvert y sera dite *quasi-sous*-harmonique si elle est *au plus égale* (condition suggérée par M. Lelong) et *quasi-partout égale* à une fonction sousharmonique (nécessairement unique) dite régularisée.

8. On dira que l'ensemble E est *effilé* en $\mathcal{R}_\tau$ ([23]) si $E \cup R_\tau$ est borné, sinon s'il existe au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, u sousharmonique telle que

$$(8) \qquad \limsup_{M \in E,\ M \neq \mathcal{R}_\tau,\ M \to \mathcal{R}_\tau} u < u(\mathcal{R}_\tau) = \limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau\ M \to \mathcal{R}_\tau} u.$$

avec la restriction que $\mathcal{R}_\tau$ *n'appartient pas à* E *pour* $\tau > 2$.

Une fonction sousharmonique au voisinage d'un point Q vaut donc toujours en Q sa lim sup en Q sur tout ensemble non effilé en Q.

Pour que E *de* R_τ *soit effilé en* $\mathcal{R}_\tau$, *il faut et suffit que l'inverse de pôle* O *soit effilé en* O *si* $\tau = 2$, *effilé d'allure* $h(OM) = \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}}$ si $\tau > 2$.

D'après cela on peut dans la définition de l'effilement remplacer l'inégalité par $u \to -\infty (M \in E, M \neq \mathcal{R}_\tau, M \to \mathcal{R}_\tau)$.

([21]) *Voir* l'article (TA) à utiliser.

([21 bis]) Cette condition évidemment nécessaire de « u bornée » a été oubliée dans l'énoncé du théorème 2 de (TA).

([22]) Rappelons que les ensembles de R_τ intérieurement polaires et polaires sont aussi les ensembles de capacité intérieure respectivement extérieure nulle (Evans-Frostman et Cartan).

([23]) Pour l'effilement en un point, voir les articles précités au *Journ. de Math.*, 1940 et *Bull. sc. Math.*, 1944.

Comme en un autre point, une fonction f admettra en $\mathcal{R}_\tau$ une *pseudo-limite* λ (finie ou $\pm\infty$) si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de λ, il existe un ensemble effilé en $\mathcal{R}_\tau$ sur le complémentaire duquel f est, bors $\mathcal{R}_\tau$, définie et de valeur contenue dans $\mathcal{V}$. Il y a unicité. Une fonction sousharmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ y admet une pseudo-limite égale à $u(\mathcal{R}_\tau)$.

Remarque. — Pour que E donne par inversion un ensemble effilé au pôle O, il faut et suffit qu'il existe u sousharmonique dans un Δ_0^R avec

$$\limsup_{(M\neq\mathcal{R}_\tau,\ M\in E,\ M\to\mathcal{R}_\tau)} u < \limsup_{M\neq\mathcal{R}_\tau,\ M\to\mathcal{R}_\tau} u < +\infty.$$

Il y correspond une notion analogue à la pseudo-limite en $\mathcal{R}_\tau$ qui permet d'interpréter $\limsup_{M\neq\mathcal{R}_\tau\ M\to\mathcal{R}_\tau} u$ pour toute fonction u sousharmonique et bornée supérieurement dans un Δ_0^R. Le cas plan donne lieu à quelques compléments immédiats.

Enfin on utilisera la notion d'ensemble E *effilé intérieurement* en $\mathcal{R}_\tau$, définie par l'effilement en ce point de toute partie dont la réunion avec $\mathcal{R}_\tau$ est compacte.

Un ensemble polaire (respectivement intérieurement polaire) est effilé (resp. intérieurement effilé) en tout point. *Les points d'un ensemble où il est effilé* (resp. effilé intérieurement) *forment un ensemble polaire* (resp. intérieurement polaire) ([24]).

La réunion de deux ensembles effilés en un point est effilé en ce point.

IV. — Suites et familles dans un ouvert de $\overline{R_\tau}$ ([24 bis]).

9. *Fonctions harmoniques.* — Dans ω ouvert de $\overline{R_\tau}$, considérons un ensemble H_0 de fonctions harmoniques *bornées sur tout compact* K *contenu*. Elles sont *également continues*, comme on le voit en se ramenant au cas où elles sont >0 au voisinage d'un point et utilisant les inégalités de Harnack ou leurs extensions relatives à $\mathcal{R}_\tau$.

Considérons alors une suite S de fonctions de H_0 ou plus généralement une famille de telles fonctions f_i et un filtre $\mathcal{F}$ sur l'ensemble des indices i; grâce à l'égale continuité, il vient comme dans le cas classique :

([24]) Cela résulte de mon dernier article du *Bull. des Sc. Math.*, n° 1.

([24 bis]) Pour les résultats sur la topologie générale et les espaces fonctionnels utilisés ci-après (et basés sur le théorème d'Arzela) *voir* le traité de Bourbaki en cours de publication par fascicules (*Act. sc. et ind.*, Hermann, Paris). *Cela permet de moderniser* en particulier *les résultats classiques de Harnack et Montel sur les fonctions harmoniques.*

Rappelons la définition de l'égale continuité. Considérons une famille de fonctions f sur l'espace E prenant leurs valeurs dans l'espace uniforme E'. Elles sont également continues dans E, si pour tout point x de E et tout entourage $\mathcal{E}$ de E', il existe un voisinage de x pour tout point y duquel $f(x)$ et $f(y)$ sont voisins d'ordre $\mathcal{E}$ quelle que soit f.

a. S'il y a convergence simple, il y a convergence uniforme sur tout K (au sens ordinaire de la structure uniforme additive de la droite) et la limite est harmonique ([25]).

b. Il existe une suite extraite de S ou un filtre plus fin que $\mathfrak{F}$ avec convergence uniforme sur tout K et limite harmonique.

Passons à un ensemble (H_i) de fonctions harmoniques u dans un *domaine* ω, *bornées supérieurement* sur tout $K \subset \omega$. Avec des fonctions de (H_i), et une suite ou un filtre :

a'. S'il y a convergence simple, la limite est $-\infty$ ou harmonique et la convergence est uniforme sur tout K, au sens ordinaire dans les deux cas.

b'. Il existe une suite extraite ou filtre plus fin avec convergence uniforme comme ci-dessus vers $-\infty$ ou une fonction harmonique ([25 *bis*]).

En effet dans *a'* il est évident, que la limite est $-\infty$ ou bornée sur tout K grâce à la remarque finale du n° 6; il y a alors dans le second cas convergence uniforme ordinaire sur tout K d'où l'harmonicité. Quant à *b'*, on commencera par assurer la convergence en *un* point, ce qui entraîne la convergence uniforme vers $-\infty$ ou nous ramène au cas de H_0.

On en déduirait que les fonctions de H_i sont *également continues en prenant sur l'espace de leurs valeurs la structure uniforme de la droite numérique achevée*, c'est-à-dire par exemple que les e^u sont également continues au sens ordinaire. Et cela se démontre directement et facilement grâce aux inégalités de Harnack.

Corollaire. — *Toute famille ordonnée filtrante croissante (ou décroissante) de fonctions harmoniques converge vers une fonction harmonique ou* $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Résumé topologique. — Considérons l'*ensemble des fonctions harmoniques u dans le domaine* ω *de* $\overline{R}$, *majorées par une fonction donnée finie continue; adjoignons la fonction* $-\infty$ et introduisons pour l'espace de ces fonctions (u et $-\infty$) la structure uniforme de la convergence compacte relativement à la structure uniforme de la droite numérique achevée dans laquelle les fonctions prennent leurs valeurs ([26]). L'espace ainsi uniformisé est *compact* ([27]).

([25]) Cette harmonicité vient de la représentation par intégrale-$\mathfrak{L}$ et, pour les filtres, de l'uniformité de convergence qui permet le passage à la limite sous le signe $\int$.

([25 *bis*]) Cet énoncé pour les suites se traduit dans le langage classique de M. Montel en disant que la famille (H_i) est normale.

([26]) On peut dire encore que cette structure est donnée par la base d'entourages définie par $|e^{u_1} - e^{u_2}| < \varepsilon$ sur K (ε et K variables).

([27]) Cette structure uniforme, évidemment séparée, est aussi métrisable puisque (Weil, *Act. sc. et ind.*, n° 551) le filtre des entourages est à base dénombrable.

La compacité traduit (*b'*) qu'il est donc équivalent d'énoncer seulement pour des suites.

De même le sous-espace des fonctions harmoniques précédentes majorant une seconde fonction finie continue.

10. *Fonctions sousharmoniques.* — On pourrait d'abord étendre les résultats du cas harmonique à un ensemble de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement sur tout compact et *également continues* en tout point (au sens de la structure uniforme additive ou de la droite numérique achevée) ([28]).

Laissant de côté cette explicitation, étudions les fonctions sousharmoniques les plus générales, en commençant par étendre la propriété fondamentale de F. Riesz :

Une suite décroissante de fonctions sousharmoniques dans le domaine ω *de* $\overline{R}_\tau$, *tend vers une fonction sousharmonique ou vers* $-\infty$ (dans ce dernier cas avec uniformité de convergence sur tout compact de ω).

Car la limite est $< +\infty$, semi-continue supérieurement, majorée sur un $\mathcal{D}$ par son intégrale-$\mathfrak{T}$ (dans laquelle on a pu passer à la limite) ([29]).

La propriété s'étend à la limite relative à une famille ordonnée filtrante décroissante ([30]).

([28]) Un cas intéressant est celui des médiantes spatiales sphériques à rayon constant de fonctions sousharmoniques données dans ω de R_τ et bornée supérieurement sur tout compact. On l'étend à ω de $\overline{R_\tau}$ en remplaçant d'abord les fonctions sousharmoniques dans un Δ_0^R fixé par l'intégrale-$\mathfrak{T}$ correspondante puis prenant les médiantes. L'intérêt de cette classe est que toute fonction sousharmonique est limite d'une suite décroissante de fonctions sousharmoniques de cette classe.

([29]) On achève en sachant que dans un domaine de R_τ la semi-continuité supérieure et l'inégalité de moyenne pour une fonction $< +\infty$ entraîne qu'elle soit sousharmonique ou $-\infty$ et l'uniformité se voit en remarquant que l'intégrale-$\mathfrak{T}$ prolongée par la fonction doit tendre vers $-\infty$ avec celle-ci.

([30]) Cela résulte par exemple de ce qu'on peut extraire une suite décroissante admettant localement la même limite, ce qui peut se déduire du lemme suivant (Dini-H. Cartan) : si une famille ordonnée filtrante décroissante de fonctions $< +\infty$, semi continues supérieurement sur un compact tend vers o, la convergence est *uniforme*. De ce lemme H. Cartan déduit d'ailleurs en se ramenant à une convergence uniforme : soit sur un compact une mesure $\mu \geq 0$ et une famille ordonnée filtrante décroissante de fonctions $f_i \leq 0$ et semi-continues supérieurement. Alors

$$\int f_i \, d\mu \to \int \lim f_i \, d\mu.$$

On en tire directement et c'est préférable, le résultat du texte.

On peut aussi procéder de la manière particulière qui suit : soit U la limite ou enveloppe inférieure, qui est semi-continue supérieurement. Prenons $\overline{D}'_{M_0} \subset \omega$ et déduisons des u_i de la famille, les v_i sousharmoniques obtenues en remplaçant dans D'_{M_0}, u_i par l'intégrale-$\mathfrak{T}$. Dans D'_{M_0} les v_i ont une limite harmonique ou $-\infty$ et $U(M_0) \leq \lim v_i(M_0)$. Comme $\lim v_i(M_0)$ ou $\mathfrak{M}^\rho_{\lim v_i}(M_0)$ indépendant de $\rho < r$ est majoré par $\mathfrak{M}^r_{\lim v_i}(M_0)$ à cause de la semi-continuité supérieure de $\lim v_i$, on a

$$U(M_0) \leq \mathfrak{M}^r_U(M_0).$$

Raisonnement analogue avec $\mathcal{R}_\tau$ remplaçant M_0 et $\Delta_0^R \subset \omega$. On remarquera *comme conséquence* le passage à la limite dans l'intégrale-$\mathfrak{T}$; en effet, $\lim v_i$ sousharmonique mais harmonique dans le $\mathcal{D}$ vaut sa propre intégrale.

Les énoncés précédents pourraient se déduire aussitôt des résultats généraux de H. Cartan sur le potentiel (31) auxquels il nous faut avoir recours maintenant pour étudier le cas de croissance.

D'après eux, *une suite croissante* (32) *ou famille ordonnée filtrante croissante de fonctions sousharmoniques u_i dans un ouvert de* R_τ, *bornées supérieurement sur tout compact contenu, tend vers une fonction quasi-sousharmonique* (33).

L'énoncé s'étend tel quel à un ouvert ω *quelconque de* $\overline{R}_\tau$.

En effet soit v_i déduit de u_i par remplacement dans Δ''_{M_0} par l'intégrale-$\mathfrak{T}$; $\lim v_i$ est harmonique dans Δ''_{M_0}, quasi-sousharmonique hors $\mathcal{R}_\tau$ donc même dans ω, coïncide dans Δ''_{M_0} avec son intégrale-$\mathfrak{T}$ (puisqu'il en est ainsi pour la régularisée). Donc dans Δ''_{M_0}

$$\lim u_i \leqq \lim v_i = \text{Intégrale-}\mathfrak{T}\text{ de } \lim u_i.$$

La régularisée U de $\lim u_i$ *hors* $\mathcal{R}_\tau$ est aussi majorée par son intégrale-$\mathfrak{T}$; en la prolongeant en $\mathcal{R}_\tau$ par la valeur $\lambda = \limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau,\, M \to \mathcal{R}_\tau} U$, on aura une fonction sousharmonique dans ω; on achève donc *en remarquant que dans le cas de* $\tau > 2$ (où le point $\mathcal{R}_\tau$ ne forme pas un ensemble polaire) *on a*

$$\lim u_i(\mathcal{R}_\tau) = \lambda.$$

En effet la majoration de U par l'intégrale-$\mathfrak{T}$ de $\lim u_i$ (pour Δ''_{M_0}) entraîne celle de λ par $\lim_{\rho \to \infty} \mathfrak{M}^\rho_U(M_0)$ qui vaut donc λ. Il suffira par suite de voir que

$$\lim u_i(\mathcal{R}_\tau) = \lim_{\rho \to \infty} \mathfrak{M}^\rho_U(M_0),$$

où d'ailleurs

$$u_i(\mathcal{R}_\tau) = \lim_{\rho \to \infty} \mathfrak{M}^\rho_{u_i}(M_0).$$

Or on peut passer à la limite pour u_i dans une intégrale-$\mathfrak{T}$ de Δ''_{M_0}, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{M}^\rho_{u_i}(M_0)$ tend selon le filtre vers $\mathfrak{M}^\rho_{\lim u_i}(M_0)$ ou $\mathfrak{M}^\rho_U$ (34). On conclut alors grâce à la convexité de la courbe [en $t = h(\rho)$] $\mathfrak{M}^\rho_{u_i}(M_0)$, et de la courbe limite $\mathfrak{M}^\rho_{\lim u_i}(M_0)$ (35).

---

(31) H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 946.

(32) Dans cet énoncé pour suites croissantes, on savait antérieurement que l'ensemble exceptionnel (où la limite diffère de la régularisée) était de mesure ordinaire nulle (Szpilrajn-Rado, *voir* T. RADO, *Subharmonic fonctions*, Ergeb. Bd. V, Heft., 1, 1937) puis même *intérieurement* polaire (*Voir* ma Note des *C. R. Acad. Sc.*, t. 207, nov. 1938, p. 836). L'énoncé actuel plus précis *caractérise* même localement les fonctions quasi-sousharmoniques comme on y reviendra dans la remarque du n° 12.

(33) Cela se déduit par exemple, selon H. Cartan, de l'énoncé pour potentiels > 0 décroissants, en voyant que localement les fonctions valent à une même constante près, des potentiels de masses $\leqq 0$ à fonction de base une certaine fonction de Green.

(34) Raisonnement analogue à celui du cas décroissant, selon la fin de la note (30).

(35) On considérera le segment joignant le point initial (point limite, pour $t \to 0$) à un point d'abscisse fixe et à sa position limite. Celle-ci doit être au-dessus de la courbe limite d'où la propriété cherchée de son point initial.

Enveloppes supérieures. — Un bel exemple de l'utilité des filtres est dans l'application (H. Cartan) du théorème de convergence précédent aux enveloppes supérieures. En adjoignant à un ensemble de fonctions sousharmoniques toutes les enveloppes supérieures d'un nombre fini d'entre elles, on ne change pas l'enveloppe supérieure, mais l'ensemble total peut être ordonné selon une famille filtrante croissante dont la limite est l'enveloppe en question.

Donc *un ensemble de fonctions sousharmoniques dans un ouvert* ω *de* $\overline{\mathrm{R}}_\tau$, *bornées supérieurement sur tout compact de* ω, *admet une enveloppe supérieure quasi sousharmonique; si les fonctions données sont harmoniques* ([36]), *l'enveloppe supérieure est continue sousharmonique* (ce qui peut s'établir sans appel au théorème le plus général).

Limite supérieure. — On passe aussitôt à l'énoncé général pour les suites : *Soit une suite de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement sur tout compact dans le domaine* ω *de* $\overline{\mathrm{R}}_\tau$. *La* lim sup *est* $-\infty$ *ou quasi sousharmonique.* Extension immédiate aux filtres à base dénombrable ([37]).

V. — Le problème de Dirichlet pour un ensemble ouvert de $\overline{\mathrm{R}}_\tau$.

11. Les seuls théorèmes de convergences donnés initialement sur les fonctions harmoniques fournissent aussitôt, grâce aux filtres, le résultat suivant :

Lemme. — *Considérons une famille ordonnée filtrante croissante* ([38]) *de fonctions sousharmoniques* u_i *dans un domaine* ω *de* $\overline{\mathrm{R}}_\tau$, *telle que l'intégrale-*$\mathfrak{L}$ *de tout* u_i *pour tout* $\overline{\mathcal{D}} \subset \omega$ *prolongée par* u_i, *appartienne encore à la famille. Alors la limite ou enveloppe supérieure sera* $+\infty$ *ou harmonique.*

Car les intégrales-$\mathfrak{L}$ des u_i dans un $\mathcal{D}$ fixé forment une famille ordonnée filtrante croissante de fonctions harmoniques, avec même limite que les u_i. L'enveloppe cherchée est donc localement soit $+\infty$, soit harmonique, d'où le même résultat pour le *domaine* ω entier. D'où la forme élargie du théorème de Perron :

Théorème 5. — *Soit sur la frontière* $\overset{*}{\omega}$ *non vide de l'ensemble ouvert* ω *de* $\overline{\mathrm{R}}_\tau$, *une fonction* f (*pouvant valoir* $\pm\infty$). *L'enveloppe supérieure* $\underline{\mathfrak{H}}_f^\omega$ *des fonctions* u *valant dans chaque domaine composant* ω_i, $-\infty$ *ou une fonction sousharmonique et qui admettent en tout point frontière une limite supérieure* $\leqq f$ *est dans chaque* ω_i, $-\infty$, $+\infty$ *ou harmonique et vaut* $\underline{\mathfrak{H}}_f^{\omega_i}$.

([36]) Ou si plus généralement les enveloppes supérieures avec l'une d'entre elles sont également continues en tout point.

([37]) Comme H. Cartan l'a montré par un exemple, l'énoncé n'est plus vrai pour un filtre quelconque.

([38]) C'est-à-dire, on le rappelle, telle que deux fonctions soient majorées par une troisième.

Si chaque u est assujettie à être de plus bornée supérieurement dans ω, l'enveloppe supérieure notée $\underline{H}_f^\omega$ est de même dans chaque ω_i, $\pm\infty$ ou harmonique et vaut $\underline{H}_f^{\omega_i}$.

Mêmes enveloppes respectives si les u sont de plus continues. Enfin résultats analogues avec fonctions surharmoniques et enveloppes inférieures $\overline{\mathfrak{H}}_f^\omega$, $\overline{H}_f^\omega$.

On a essentiellement $\underline{H}_f^\omega \leq \overline{H}_f^\omega$ et l'égalité en un point entraîne l'égalité dans tout le domaine composant contenant ce point.

12. Un point frontière P (même $\mathcal{R}_\tau$) de ω est dit *régulier* s'il existe un voisinage ouvert α et une fonction harmonique (ou ce qui est équivalent surharmonique) >0 sur $\alpha\cap\omega$ s'annulant en P (c'est-à-dire tendant vers zéro quand $M\to P$). Si P est en $\mathcal{R}_\tau$ et $\tau>2$, il est toujours régulier; sinon l'inversion de pôle $O\neq P$ conserve sa régularité. Dans tous les cas, l'irrégularité de P équivaut à l'effilement en P de $C\omega$; la régularité de P équivaut à l'existence dans ω d'une fonction surharmonique >0 s'annulant en P et de liminf >0 en tout autre point frontière ([39]); il s'ensuit que si *f est bornée supérieurement*, $\overline{H}_f^\omega$ admet en P régulier une lim. sup. au plus égale à celle de f en P sur $\overset{\star}{\omega}$. Enfin l'ensemble des points frontière irréguliers est une réunion dénombrable de compacts, polaire, et la réunion des ensembles analogues (d'ailleurs disjoints) pour chaque ω_i.

Lorsque $\underline{H}_f^\omega(M)$ et $\overline{H}_f^\omega(M)$ sont égaux et finis en M, on les note $H_f^\omega(M)$. Si cela a lieu quel que soit M, f est dite *résolutive* et H_f^ω dite fonction de Wiener. On verra aisément que si $C\omega$ est polaire (donc ω connexe) les u considérées d'enveloppes $\underline{H}_f^\omega$, $\overline{H}_f^\omega$ et celles-ci sont des constantes et f n'est résolutive que si $f=$ const. finie. D'où la généralité du résultat suivant, point essentiel de l'extension entreprise de (AS) :

THÉORÈME 6. — *Soit ω ouvert de complémentaire non polaire (ou ce qui est équivalent de frontière non polaire). On notera $\overset{\star}{\omega}_M$ le domaine composant contenant le point M de ω. Toute f finie continue sur $\overset{\star}{\omega}$ est résolutive; $H_f^\omega(M)$ est fonctionnelle linéaire de cette f et s'exprime (de manière unique) selon $\int_{\overset{\star}{\omega}} f(P)\,d\mu_M(P)$, où μ_M est une mesure ≥ 0 de Radon sur $\overset{\star}{\omega}$, nulle hors $\overset{\star}{\omega}_M$ et identique sur $\overset{\star}{\omega}_M$ à celle relative à $\overset{\star}{\omega}_M$.*

La mesure - μ_M (ou mesure harmonique relative à M) extérieure ou intérieure d'un ensemble e de $\overset{\star}{\omega}$ (de fonction caractéristique φ_e) vaut $\overline{H}_{\varphi_e}^\omega(M)$ respectivement $\underline{H}_{\varphi_e}^\omega(M)$ ([40]).

([39]) On pourra obtenir une telle fonction en s'arrangeant pour la prendre harmonique dans un voisinage de P, constante ailleurs.

([40]) Leur nullité respective, leur égalité sont indépendantes de M dans un même domaine composant ω_i; de plus, comme pour toute fonction harmonique >0, *le rapport des valeurs de chacune* (supposée non nulle) *en deux points arbitraires d'un compact d'un même ω_i est compris entre deux nombres >0 indépendants de e.*

La sommabilité - μ_M (*ou sommabilité harmonique relative à* M *fixé*) *d'une f quelconque sur* $\overset{*}{\omega}$ *équivaut au fait que* $\overline{H}^{\omega}_{f}(M)$ *et* $\underline{H}^{\omega}_{f}(M)$ *soient finis et égaux en* M ([41]) (elle est donc indépendante de M dans un même domaine composant et équivaut à la résolutivité de *f* pour δ_M) *et l'on a alors*

$$H^{\omega}_{f}(M) = \int_{\overset{*}{\omega}} f\, d\mu_M. \tag{9}$$

On y parvient en adaptant les raisonnements principaux de (AS) à partir des deux résultats suivants que nous allons démontrer : *u* étant un ouvert de complémentaire non polaire,

A. Si *f* sur $\overset{*}{\omega}$ est finie continue, elle est résolutive.

B. Il existe dans ω une fonction harmonique $\leqq 0$ tendant vers $-\infty$ aux points frontière irréguliers ([42]) (d'où résulte que les enveloppes $\underline{H}^{\omega}_{f}$, $\overline{H}^{\omega}_{f}$ sont aussi celles des fonctions correspondantes assujetties à être de plus harmoniques).

Supposons d'abord $C\omega$ *d'intérieur non vide*. Alors (A) ainsi réduit résultera comme dans (AS) de :

A'. Étant donnée φ finie continue dans $\overline{R_\tau}$, on peut l'approcher à ε près hors d'un point Q par la différence de deux fonctions finies continues sousharmoniques hors Q.

Il suffit même de réaliser l'approximation hors d'un voisinage de Q ([42 *bis*]). Pour se ramener alors au cas connu de Q en $\mathcal{R}_\tau$, on fera dans le plan une simple inversion; si $\tau > 2$, on remplacera φ par φ_1, voisine mais constante au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ et l'on se ramène donc au cas de φ nul au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$; on approche la transformée de Kelvin (complétée par zéro au pôle Q) par une différence de deux fonctions sousharmoniques continues dans R_τ, $\geqq 0$ en Q et l'on fait à nouveau la transformation de Kelvin.

Quant à B, on fera une inversion de pôle O extérieur à ω, ce qui nous ramène au cas connu de ω borné. Si $\tau > 2$ et si $\omega \supset \mathcal{R}_\tau$, on prendra, grâce à l'addition d'une constante, une fonction harmonique nulle en O dans l'inverse de ω, puis on ajoutera à la transformée une constante la rendant < 0.

([41]) De plus, la condition $\underline{H}^{\omega}_{f}(M) = \overline{H}^{\omega}_{f}(M) = +\infty$ (indépendante de M dans un même domaine composant) équivaut à ce que *f* majore une fonction mesurable - μ_M, et sommable - μ_M *au sens large* avec intégrale valant $+\infty$. De même avec $-\infty$.

Ajoutons que la condition « $\overline{H}^{\omega}_{f}$ partout $< +\infty$ » équivaut à l'existence d'une fonction résolutive (et même borélienne) majorant *f*.

([42]) *Voir* plus loin un énoncé plus général (n° 13 *c*).

([42 *bis*]) Pour obtenir (A') lui-même, on partira de cet énoncé restreint avec φ = const. dans un voisinage de Q et l'on modifiera convenablement les deux fonctions sousharmoniques dans un $D^{r}_{Q} - Q$ (si $Q \neq \mathcal{R}_\tau$) ou Δ'^{r}_{Q}.

Passons *au cas général*. On démontre (B) en utilisant sa validité lorsqu'on ôte de ω un voisinage $\overline{D_0^r}$ d'un point O puis faisant un prolongement sur ce voisinage par la méthode alternée, dont le succès vient de l'existence d'un point frontière régulier du domaine composant de ω qui contient O ([43]). Enfin (A) s'obtient en formant d'abord, grâce à sa forme réduite (en ôtant un D_0^r) et au procédé alterné, une fonction harmonique bornée prenant les valeurs de f aux points-frontière réguliers, puis achevant par usage de (B).

Remarque. — Ce même emploi de la méthode alternée donne le résultat suivant grâce à la propriété (*d*, n° 7). Soit E polaire, sur ω de complémentaire non polaire. Il existe dans ω une fonction sousharmonique < 0 valant $-\infty$ sur E ([44]) et même finie en un point fixé hors E. On en déduit que *toute fonction quasi-sousharmonique dans un tel ω est l'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques qu'elle majore.*

13. *Mesure harmonique.* — Le théorème G ainsi établi, poursuivons l'extension des résultats ultérieurs, en particulier de TA. ω *étant ouvert et* $C\omega$ *non polaire*, on mettra en relief la propriété de la note ([40]); puis :

a. Soit Φ finie continue dans $\overline{\omega}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$ et un compact E dans ω, il existe dans ω un compact $F \supset E$ tel que pour tout ouvert ω_0 satisfaisant à $F \subset \omega_0 \subset \omega$, on ait sur E, $|H_\Phi^\omega - H_\Phi^{\omega_0}| < \varepsilon$. D'où résulte que si ω_n tend en croissant vers ω, $H_\Phi^{\omega_n} \to H_\Phi^\omega$, ce qui équivaut à dire que, pour M, fixé, *la mesure harmonique sur* $\overset{\star}{\omega}_n$ *converge vaguement* [au sens de H. Cartan ([45])] *vers la mesure harmonique sur* $\overset{\star}{\omega}$.

([43]) De façon précise soit $0 < r_1 < r_2 < r_3$ et $\overline{D_0^{r_3}} \subset \omega$. Soit dans $\omega - \overline{D_0^{r_1}}$ une fonction harmonique $u \leqq 0$ tendant vers $-\infty$ aux points irréguliers, puis v_1 l'intégrale-$\mathfrak{P}$ pour $D_0^{r_3}$ et u, enfin

$$w_1 = H_{f_1}^{\omega - \overline{D_0^{r_1}}},$$

où f_1 vaut 0 sur $\overset{\star}{\omega}$ et $v_1 - u$ sur $\Sigma_0^{r_3}$. Soit v_2 l'intégrale-$\mathfrak{P}$ pour $D_0^{r_3}$ et $\mu + w_1$,

$$w_2 = H_{f_2}^{\omega - \overline{D_0^{r_2}}}$$

où f_2 vaut 0 sur $\overset{\star}{\omega}$ et $v_2 - u$ sur $\Sigma_0^{r_3}$, etc. *Comme* $H_{\overline{\varphi}}^{\omega - \overline{D_0^{r_1}}}$ où φ vaut 0 sur $\overset{\star}{\omega}$ et 1 sur $\Sigma_0^{r_3}$ est < 1 sur $\Sigma_0^{r_3}$, on verra par le procédé alterné que w_n et v_n restent bornés et convergent uniformément vers des fonctions harmoniques w et v, enfin que v et $w + u$ coïncident dans le domaine

$$r_2 < OM < r_3.$$

Alors la fonction égale à v dans $\overline{D_0^{r_3}}$ à $w + u$ dans $\omega - \overline{D_0^{r_1}}$ résout la question. On remarquera qu'il n'y a pas même besoin de connaître la forme réduite de (A).

([44]) En partageant au besoin E en deux, on se ramène au cas où un D_0^r contenu dans ω ne rencontre pas E. On utilise (*d*, n° 7) pour $\overline{R_\tau} - O$, d'où une fonction sousharmonique < 0 dans $\overline{R_\tau} - \overline{D_0^r}$ valant $-\infty$ sur E, On la prolonge (en la modifiant) dans ω.

On complète l'énoncé en raisonnant comme dans la note ([20]).

([45]) Sur un ensemble localement compact une mesure de Radon μ_n converge vaguement vers μ si pour toute fonction finie continue f, nulle hors d'un compact $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$.

b. Soit ω_1 ouvert contenu dans ω et M dans ω_1. Sur $\overset{\star}{\omega}\cap\overset{\star}{\omega}_1$, la mesure harmonique (extérieure ou intérieure) pour M décroît quand on passe de ω à ω_1 et la sommabilité est conservée; de plus si f est résolutive pour ω f_1 prise sur $\overset{\star}{\omega}_1$ égale à f ou H_f^ω, est résolutive pour ω_1 et dans ω_1, on a

$$H_f^\omega = H_f^{\omega_1}.$$

Enfin soit ω_n ouvert tendant en croissant vers ω, E un ensemble *ouvert sur* $\overset{\star}{\omega}$, appartenant aux $\overset{\star}{\omega}_n$. Sur E, *la mesure harmonique pour* M *fixé et* ω_n *tend en croissant et au sens le plus fort vers la mesure harmonique pour* ω ([46]).

c. Soit l'ensemble *e* sur ω :

α. La condition $\underline{H}^\omega_{\varphi_e}(M) = 0$ en un point M (respectivement pour tout M) équivaut à ce que toute fonction souharmonique et bornée supérieurement dans δ_M (respectivement dans ω) de $\limsup \leqq 0$ aux points de $\overset{\star}{\delta}_M \cap Ce$ (resp. $\omega \cap Ce$) est $\leqq 0$.

β. La condition $\overline{H}^\omega_{\varphi_e}(M) = 0$ en un point M (respectivement pour tout M) équivaut à l'*existence d'une fonction sousharmonique* [ou ce qui est équivalent *harmonique* ([47])] $\leqq 0$ *dans* δ_M (respectivement dans ω) *tendant vers* $-\infty$ *en tout point de* $\overset{\star}{\delta}_M \cap e$ (respectivement de $\overset{\star}{\omega}\cap e$).

γ. Ces conditions prises séparément subsistent quand ω est changé en ω_1 ($C\omega_1$ non polaire) s'il existe Δ ouvert contenant *e* et tel que $\omega\cap\Delta = \omega_1\cap\Delta$; ainsi sur l'ensemble $\overset{\star}{\omega}\cap\Delta$ ou $\overset{\star}{\omega}_1\cap\Delta$ et pour $M\in\omega\cap\omega_1$, la mesurabilité - μ_M est la même pour ω et ω_1.

d. Les ensembles *e* tels que $\underline{H}^\omega_{\varphi_{e\cap\omega}}\left(\text{ou } \overline{H}^\omega_{\varphi_{e\cap\overset{\star}{\omega}}}\right)$ soit nul, sont *négligeables* intérieurement (extérieurement) pour ω. Dans le second cas on pourra dire seulement « négligeables ».

Soit sur ω, l'ensemble E tel que $\Delta = \omega - E$ soit non vide ouvert; il y a équivalence des conditions que E soit négligeable pour Δ, que E soit polaire ou que toute fonction harmonique et bornée dans Δ soit prolongeable harmoniquement dans ω; et dans cette hypothèse, pour toute fonction Φ dans $\overline{R}_-$, $\underline{H}^\Delta_\Phi$, $\overline{H}^\Delta_\Phi$ valent $\underline{H}^\omega_\Phi$, $\overline{H}^\omega_\Phi$.

e. Au qualificatif « négligeable intérieurement ou extérieurement » on

([46]) Sur E localement compact la mesure μ' limite forte par croissance et la mesure harmonique pour ω donnent la même intégrale pour toute fonction f finie continue nulle hors d'un compact, d'où leur identité.

([47]) Partons d'une telle fonction *sousharmonique* (*voir* le raisonnement d'existence dans TA) et considérons la fonction ς de ses lim sup à la frontière. On aura une fonction harmonique cherchée en ajoutant à H^ω_ς une fonction harmonique < 0 tendant vers $-\infty$ aux points irréguliers.

ajoutera « absolument » pour caractériser que la propriété a lieu quel que soit ω ([48]).

Les ensembles polaires sont absolument négligeables.

Il y a identité des ensembles intérieurement polaires et des ensembles absolument négligeables intérieurement.

On explicitera aisément des conséquences particulières de toutes ces propriétés. Ainsi une fonction harmonique et bornée dans ω, est nulle si elle s'annule à la frontière, hors d'un ensemble intérieurement négligeable (en particulier à peu près partout).

14. *Mesure harmonique de* $\mathcal{R}_\tau$. — Un point forme un ensemble absolument négligeable, *sauf* $\mathcal{R}_\tau$ *si* $\tau > 2$.

Pour que $\mathcal{R}_\tau(\tau > 2)$ *soit négligeable pour un ouvert* ω *dont* $\mathcal{R}_\tau$ *est point frontière, il faut et il suffit que pour une ou toute inversion, le pôle* O *soit régulier pour l'inverse* ω' (c'est-à-dire $C\omega'$ non effilé en O).

C'est avec un autre langage un résultat de Bouligand ([49]). qui se déduit facilement de la remarque du n° 8. En effet la fonction de Wiener u pour ω, la valeur o sur $\overset{\star}{\omega} - \mathcal{R}_\tau$ et 1 en $\mathcal{R}_\tau$ se prolonge sousharmoniquement au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, ce point exclus, par la valeur zéro hors ω sauf aux points irréguliers où l'on prendra des valeurs convenables bornées. Si u n'est pas nulle, donc est > 0 dans un domaine composant δ de ω, on voit que $C\delta$ (donc $C\omega$) donne par inversion, à un ensemble polaire près, un ensemble effilé en O.

Réciproquement si O est régulier pour l'inverse de ω, il existe dans un Δ_0^R une fonction sousharmonique < 0 hors $\omega \cap \Delta_0^R$, mais de lim sup > 0 en $\mathcal{R}_\tau$. Il en résulte que la fonction de Wiener pour $\omega \cap \Delta_0^{R_1}(R_1 > R)$ et distribution-frontière finie, mais nulle hors $\mathcal{R}_\tau$ n'est pas nulle partout.

Remarque. — D'après le critère (c, γ) traduisant la négligeabilité, le théorème précédent donne par inversion, pour $\tau > 2$, *le critère suivant de régularité* d'un point-frontière $O \neq \mathcal{R}_\tau$ d'un ouvert Ω : *il faut et il suffit qu'il existe au voisinage de* O *sur* Ω *une fonction surharmonique* (ou, ce qui est équivalent, *harmonique*) $u > 0$ *telle que* $\frac{u}{h(OM)} \to +\infty$, $(M \to O)$.

Ce critère est vrai *même pour* $\tau = 2$ comme va l'établir succinctement la démonstration directe suivante (pour $\tau \leq 2$), ce qui entraînera inversement aussitôt le théorème précédent. On se basera sur le critère suivant : pour que le point frontière O de Ω borné soit régulier, il faut et il suffit que $h(OM)$ soit égale à la

([48]) Pour les ensembles de R_τ, il y a bien équivalence avec les définitions de TA, où n'interviennent que des ω bornés.

([49]) Bouligand, *Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1925, p. 98.

fonction de Wiener de Ω pour valeur-frontière $h(OM)$ ([50]), ce qui équivaut directement ([51]) à la non existence d'une fonction harmonique dans Ω, $\geqq 0$ non partout nulle, $\leqq h(OM) +$ const. s'annulant quasi-partout à la frontière ([52]).

Si O est régulier, considérons pour Ω ramené à être borné, la fonction de Wiener u pour une distribution égale à $h(OM)$ dans D_0' et à zéro ailleurs. Elle diffère de $h(OM)$ de la fonction de Wiener pour zéro dans D_0' et $h(OM)$ ailleurs. Cette dernière s'annulant en O, on voit que K étant fixé ($0 < K < 1$) u majore $Kh(OM)$ pour tout r fixé, dans un voisinage de O choisi alors assez petit, tandis qu'en tout point fixé de Ω, u tend vers zéro avec r. On en déduit pour chaque composant Ω_i de Ω une fonction harmonique $u_i > 0$ telle, si O est point frontière, que $\frac{u_i}{h(OM)} \to +\infty (M \to O)$ ([53]). On répond alors à la question pour Ω en prenant la fonction égale dans Ω_n à $u_n + nh(OM)$.

Réciproquement, considérons une fonction surharmonique u de l'énoncé dans $\delta = \Omega \cap D_0'$. On voit facilement qu'elle majore toute fonction harmonique v dans δ, $\geqq 0$, $\leqq h(OM) +$ const. s'annulant quasi-partout à la frontière. De même εu. D'où $v = 0$.

15. *Extension de l'intégrale de Poisson-Stieltjes.* — Considérons dans $\overline{R}_\tau$ un domaine ω ($C\omega$ non polaire) et la fonction de Wiener $\int f d\mu_M$. La seule invariance en M des ensembles de mesure-μ_M nulle entraîne l'existence d'une fonction de P sur $\overset{*}{\omega}$, $\varphi_M^0(P)$ telle que

$$\mu_M(e) = \int_e \varphi_M^0(P)\, d\mu_0(P),$$

d'où

$$H_f^\omega(M) = \int_{\overset{*}{\omega}} f(P)\varphi_M^0(P)\, d\mu_0(P). \tag{10}$$

([50]) Immédiat d'après l'expression générale de la différence entre « plus petite » et « meilleure » majorante harmonique dans un domaine (*Voir* mon article du *Bull. Ac. roy. des Sc. de Belgique*, t. 24, 1938, p. 426). Cela rentre d'ailleurs dans le théorème général 5 de mon article déjà cité (*Bull. Sc. Math.*, janvier 1944).

Remarquons que la différence entre $h(OM)$ et sa fonction de Wiener si elle n'est pas nulle, n'est pas bornée.

([51]) Existence évidente si $h(OM)$ diffère de la fonction de Wiener (toujours au plus égale); inversement s'il y a existence d'une telle fonction u, on verra que $h(OM) - u$ doit majorer toute fonction sousharmonique dans Ω, bornée supérieurement, de limite supérieure $\leqq h(OP)$ en tout point frontière P, et doit donc majorer la fonction de Wiener de $h(OP)$.

([52]) Cette seconde forme qui, comme l'autre, entraîne directement le théorème sur la mesure harmonique de $\mathcal{R}_\tau$ a justement été donnée de manière voisine et utilisée dans ce but par M. Bouligand (*loc. cit.*).

([53]) On considère u_n correspondant à $r_n \to 0$, de sorte que, en P fixé, $u_n(P) < \frac{1}{n^3}$. On voit que $\sum_1^\infty n u_n$ répond à la question. Tout cela n'est d'ailleurs qu'une transposition du lemme 2 de TA.

Lorsque ω est D_0^R, μ_0 est proportionnelle à la mesure superficielle sur Σ_0^R et l'intégrale précédente est celle de Poisson. On étendra celle de Poisson-Stieltjes en introduisant $\int_{\overset{*}{\omega}} \varphi_M^0(P)\, d\nu$ où ν est une mesure de Radon sur $\overset{*}{\omega}$, O étant fixé. Cette intégrale doit permettre de représenter des classes étendues de fonctions harmoniques dans ω ([54]), avec des applications dans le plan aux fonctions holomorphes. L'allure à la frontière dépendra de l'étude, à approfondir, du noyau φ.

16. *Prolongement sousharmonique et plus petite majorante harmonique.* — Soit u sousharmonique dans ω ouvert. On envisage son prolongement en considérant v sousharmonique dans δ ouvert rencontrant ω, telle que :

a. $u \geqq v$ dans $\delta \cap \omega$;

b. sur $\overset{*}{\omega} \cap \delta$, $\limsup u$ est partout $< +\infty$ et quasi-partout égale à v.

Alors u prolongée par v dans $\delta \cap C\omega$ définit une fonction U quasi sousharmonique dans $\omega \cup \delta$ ([55]).

Applications. — 1° Cas de $v = 0$, u fonction de Wiener pour $f \geqq 0$, nulle sur $\delta \cap \overset{*}{\omega}$;

2° Soit ω tel que $\overline{\omega}$ soit contenue dans Ω, où v est sous-harmonique; v est résolutive pour ω et H_v^ω prolongée par v hors ω est quasi sousharmonique. H_v^ω est d'ailleurs l'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques dans ω dont le prolongement par v est sousharmonique dans Ω.

Enfin si Ω est connexe, l'enveloppe supérieure des $H_v^\omega(\overline{\omega} \subset \Omega)$ (qui est aussi la limite des $H_v^{\omega_n}$ pour ω_n tendant en croissant vers Ω avec $\overline{\omega_n} \subset \Omega$) est harmonique ou vaut $+\infty$ suivant qu'il existe ou non une majorante harmonique de v dans Ω et vaut dans le premier cas la *plus petite majorante harmonique de* v.

17. *Extension de la fonction fondamentale* $h(MP)$. — On définira $h_Q^P(M)$ comme fonction de M dans $\overline{R}_\tau$ dépendant de deux points *distincts* P et Q de $\overline{R}_\tau$ selon les conventions suivantes, à partir de $h(r)$ définie pour $(0 \leqq r \leqq +\infty)$

$$(11)\quad \begin{cases} a.\ h_{\mathcal{R}_\tau}^P(M) = h(PM), \qquad h_Q^{\mathcal{R}_\tau}(M) = -h(QM); \\ b.\ \text{si P et Q sont distincts de } \mathcal{R}_\tau : \\ \quad h_Q^P(M) = h(PM) - h(QM) - h(PQ), \qquad \text{avec} \quad h_Q^P(\mathcal{R}_\tau) = -h(PQ). \end{cases}$$

([54]) *Voir* à ce sujet MARIA and MARTIN, *Representation of positive harmonic Functions* (*Duke Math. Journal*, Vol. 2, septembre 1936).

([55]) On le voit localement en introduisant une fonction sousharmonique $w < 0$ valant $-\infty$ sur l'ensemble polaire exceptionnel de $\overset{*}{\omega} \cap \delta$; alors $U + \lambda w$ est sousharmonique ($\lambda > 0$), d'où la quasi-sousharmonicité de la limite pour $\lambda \to 0$, puis de U.

Propriétés. — Comme fonction de M elle est surharmonique hors Q, sous-harmonique hors P avec flux φ_τ et $-\varphi_\tau$ en ces points. Elle est, pour Q fixé, *symétrique* en M et P hors Q et alors notée $h_Q(M, P)$ ([56]).

En extension d'un critère antérieurement rappelé, on verra que $h_Q^P(M)$, qui est *résolutive* ([57]) pour tout ω ($C\omega$ non polaire), *coïncide avec sa fonction de Wiener si et seulement si* P *et* Q *sont tous deux hors de* ω *et de l'ensemble des points frontière irréguliers;* dans le cas général, la différence de ces fonctions, bornée au voisinage de tout point frontière autre que P et Q n'est bornée au voisinage de P pris sur $\overset{*}{\omega}$ que si P est régulier; elle est nulle ou non bornée dans ω si P et Q sont hors ω.

Ainsi pour deux tels points P et Q (situés hors ω et non irréguliers) et $M \in \omega$, $h_Q^P(M) = h_Q^M(P) = \int h_Q^P(s)\, d\mu_M(s)$. Comme μ_M ne charge pas l'ensemble des points frontière irréguliers, on en déduira pour M et P dans ω, Q hors ω et non irrégulier :

$$(11) \qquad \int h_Q^P(s)\, d\mu_M(s) = \int h_Q^M(s)\, d\mu_P(s) \qquad \text{ou} \qquad H^\omega_{h_Q^P}(M) = H^\omega_{h_Q^M}(P),$$

grâce à une interversion d'intégrations ([57 *bis*]).

18. *Fonction de Green.* — Soit un ouvert ω ($C\omega$ non polaire) et le point $P \in \omega$. *Il existe une fonction et une seule surharmonique dans* ω, *harmonique dans* $\omega - P$, *de flux* φ_τ *en* P, *bornée à la frontière de* ω *et s'y annulant quasi-partout* (ou même seulement sauf sur un ensemble intérieurement négligeable pour ω). *Ces conditions à la frontière de* ω *équivalent* à celle que la fonction, soit u, coïncide avec la fonction de Wiener pour $\omega - E$ où E est *un* compact de ω (déterminé ou arbitraire) dont P est intérieur, avec valeur zéro sur $\overset{*}{\omega}$ et u sur E ([58]).

La fonction (qui s'annule aux points-frontière réguliers) est > 0 dans ω_P, nulle dans les autres domaines composants et vaut au voisinage de P, $h_Q^P(M)$ à une fonction harmonique près (Q quelconque). On l'appellera *fonction de Green pour* ω, soit $G_\omega^P(M)$.

([56]) On remarquera que ces propriétés la déterminent à une fonction de Q près.

([57]) On se ramène à voir la résolutivité d'une fonction φ égale à $h(PM)$ au voisinage d'un point $P \neq \mathcal{R}_\tau$ nulle d'ailleurs. Évident s'il n'y a qu'un point-frontière régulier, nécessairement $\mathcal{R}_\tau$. Sinon il suffit de se ramener à ω_1 plus grand contenant $\mathcal{R}_\tau$ ($C\omega_1$ non polaire). On montre alors à partir du cas d'un ouvert borné et grâce au procédé alterné, l'existence d'une fonction harmonique ≥ 0 dans ω_1 qui pour tout point de $\overset{*}{\omega} - P$ est bornée au voisinage et prend la valeur φ s'il est régulier. On en déduira la résolutivité cherchée. La fonction d Wiener de l'énoncé est bornée au voisinage de tout point-frontière autre que P et Q et le théorème s'achève en raisonnant sur des voisinages de P et Q.

([57 *bis*]) L'égalité (11) n'est d'ailleurs pas vraie pour Q intérieur ou irrégulier et il est intéressant de comparer à cet égard Δ_0^τ dans le plan et dans les espaces supérieurs pour Q en $\mathcal{R}_\tau$.

([58]) Cette présentation a été donnée, pour ω borné, à l'occasion d'une équation plus générale que celle de Laplace dans un article (*Rendiconti del R. Ist., Lombardo*, vol. 63, 1930).

L'existence se voit en considérant $h_Q^P(M)$ au voisinage de P et utilisant le procédé alterné avec deux domaines $\mathcal{D}$ contenant P. L'unicité vient de ce que la différence de deux fonctions possibles est harmonique en P.

On montrera que si $\omega_1 \subset \omega$, $G_{\omega_1}^P \leq G_\omega^P$ et si ω_n tend en croissant vers ω, $G_{\omega_n}^P \to G_\omega^P$.

Si Q *est extérieur à* ω, *ou point-frontière régulier*

$$G_\omega^P(M) = h_Q^P(M) - H_{h_Q^P}^\omega(M), \tag{12}$$

d'où, d'après (11), la *symétrie* ([59]) : $G_\omega^P(M) = G_\omega^M(P)$ qui conduit à la *notation* $G_\omega(M, P)$. Et grâce à un passage à la limite avec ω_n, on verra alors que *pour tout* Q *hors* ω

$$G_\omega^P(M) = h_Q^P(M) - \psi_Q^P(M), \tag{13}$$

où ψ_Q^P *est la plus grande minorante harmonique de* h_Q^P *dans* ω.

Remarque. — Supposons que δ étant ouvert borné, $\delta \cap \overset{*}{\omega}$ soit au voisinage de chaque point une ligne ($\tau = 2$) ou surface ($\tau > 2$) assez régulière (par exemple à courbures finies continues). Alors sur cette partie de la frontière $\frac{dG_\omega^P}{dn}$ existe et $\mu_P(e) = \int_e \frac{dG_\omega^P}{dn} d\sigma$ ([60]).

VI. — Représentation potentielle dans $\overline{R}_\tau$ des fonctions sousharmoniques.

19. *Potentiel* - h_Q. — Reprenons pour Q fixé dans $\overline{R}_\tau$ la fonction $h_Q(M, P)$ définie pour M et P hors Q et d'ailleurs *bornée inférieurement lorsque* M *et* P *varient sur un compact de* $\overline{R}_\tau - Q$ (ce qui demande un petit examen du cas plan).

Donnons-nous dans $\overline{R}_\tau - Q$ une mesure de Radon $\mu \geq 0$ ([61]). La sommabilité - μ en un point M au moins de la fonction de P, $h_Q(M, P)$ équivaut à la sommabilité - μ *au voisinage de* Q de $h(QP)$ si $Q \neq \mathcal{R}_\tau$ (et entraîne dans ce

([59]) Cette symétrie, qui entraîne inversement (11), se voit aussi grâce au passage à la limite $G_{\omega_n} \to G_\omega$, en se ramenant à une frontière plus régulière et adaptant les raisonnements « élémentaires » du cas de ω borné, enfin avec la propriété auxiliaire suivante : si u et v sont harmoniques au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, on a, pour r assez grand,

$$\int_{\Sigma_0^r} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

([60]) On utilisera le résultat (bien connu pour ω borné) lorsque la frontière entière est assez régulière et l'on fera un passage à la limite avec un ω_n à frontière assez régulière comprenant une partie de $\delta \cap \overset{*}{\omega}$. On se servira des propriétés de la dérivée normale à la frontière d'une fonction harmonique y prenant les valeurs d'une fonction assez régulière (*Voir* SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, 1931, Bd. 33).

([61]) Voir l'exposé sur la mesure de Radon dans un espace localement compact par H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1942).

cas que *la masse totale soit finie*), ou de $h(OP)$ si Q est en $\mathcal{R}_\tau$ (O quelconque). Il y a alors sommabilité-μ au sens large de h_Q quel que soit M et l'intégrale $\int_{\overline{R}_\tau - Q} h_Q(M, P)\, d\mu(P)$ dite *potentiel* — h_Q de μ est *surharmonique* dans $\overline{R}_\tau - Q$ et même *harmonique* sur tout ouvert partiel sans masses, comme il résulte des propriétés analogues de h_Q ([62]).

Résultats analogues avec une mesure $\mu \leqq 0$ et la sousharmonicité. On passerait à des masses de signe quelconque (mesure généralisée, somme d'une mesure $\geqq 0$ et d'une mesure $\leqq 0$, avec potentiel somme des potentiels, définie quasi-partout).

On complètera par des propriétés qui se déduisent aussitôt du cas classique et de la décomposition de h_Q. Ainsi les flux généralisés relatifs à $\mathcal{D}$ ou $\overline{\mathcal{D}}$ (Q hors $\overline{\mathcal{D}}$) (*voir* n° 6 *bis*) valent le produit de φ_τ par la masse portée par $\mathcal{D}$ ou $\overline{\mathcal{D}}$.

20. *Représentation potentielle.* — Poursuivons l'extension des résultats classiques de F. Riesz.

Théorème 7. — *Soit u sousharmonique dans un ouvert ω et Q hors ω. Il existe sur ω une mesure de Radon $\mu \leqq 0$ unique* (dite associée) indépendante de Q *telle que sur tout ouvert δ $(\overline{\delta} \subset \omega)$, u soit égale, à une fonction harmonique près, au potentiel-h_Q des masses portées par δ.*

La seule nouveauté est d'examiner le cas de $Q \neq \mathcal{R}_\tau$ avec $\mathcal{R}_\tau \in \omega$. Alors μ hors $\mathcal{R}_\tau$ est déterminé par la théorie classique et vaut pour l'ensemble $r_1 \leqq OM < r_2$, la différence entre les flux généralisés de u relatifs à $\overline{\Delta}_0^{r_1}$ et $\overline{\Delta}_0^{r_2}$; comme le flux de u à travers Σ_0^r reste borné pour $r \to \infty$, on trouve pour tout $\delta - \mathcal{R}_\tau$ une masse totale finie. Enfin la charge de $\mathcal{R}_\tau$ doit valoir le quotient par φ_τ du flux à l'infini.

Ainsi est établie l'existence d'une mesure qui donne pour tout $\overline{\mathcal{D}} \subset \omega$ le quotient par φ_τ du flux généralisé de u relatif à $\overline{\mathcal{D}}$. Prise sur tout δ elle admet bien un potentiel et il résulte du n° 6 *bis* fin que ce potentiel y vaut u à une fonction harmonique près.

([62]) Il n'y a aucune difficulté (en particulier pour prendre une moyenne et permuter les signes $\int$) si μ ne charge qu'un compact de $\overline{R}_\tau - Q$. On passe au cas général en introduisant un compact E_n tendant en croissant vers $\overline{R}_\tau - Q$.

Si ω_n est un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \overline{R}_\tau - Q$, on a pour M fixé

$$\int_{E_n} = \int_{E_n - \omega} + \int_{\omega},$$

où $\int_{E_n}$ et $\int_{E_n - \omega}$ tendent vers les intégrales relatives à $\overline{R}_\tau - Q$ et $(\overline{R}_\tau - Q) - \omega$. On conclut en remarquant que $\int_{E_n - \omega}$ est fonction de M qui dans ω est harmonique et monotone à partir d'un certain rang.

Remarque. — Comme lorsque ω ne contient par $\mathcal{R}_\infty$, μ vaut sur tout ouvert partiel la mesure associée sur cet ouvert.

THÉORÈME 8. — *Soit le domaine* ω ($C\,\omega$ *non polaire*), u *sousharmonique dans* ω, μ *la mesure de Radon associée. Pour que la fonction de* P, $G_\omega(M, P)$, *soit sommable-*μ *dans* ω *pour un point* M *au moins de* ω, *il faut et il suffit que* u *admette une majorante harmonique dans* ω *et alors*

$$u(M) = \int_\omega G_\omega(M, P)\, d\mu(P) + \overset{*}{u}(M), \tag{14}$$

où $\overset{*}{u}(M)$ *est la plus petite majorante harmonique de* u *dans* ω (63).

Si $\int_\omega G_\omega(M, P)\, d\mu(P)$ est finie en un point M_0, voyons (en reprenant le raisonnement connu), qu'elle vaut partout u à une fonction harmonique près, d'où l'existence d'une majorante harmonique pour u. Soit ω_n ouvert croissant tel que $\overline{\omega_n} \subset \omega$ et $\omega_n \to \omega$. En tout M, $\int_{\omega_n}$ tend en décroissant vers $\int_\omega$ et est donc finie en M_0. De plus, dans ω_n, $\int_{\omega_n} = u + v_n$ est harmonique, comme il résulte de la décomposition de G_ω. Donc v_n décroit en tout point où u est finie, par suite quasi-partout, puis même (grâce à une moyenne) partout; sa limite v finie en M_0 est harmonique et $\int_\omega = u + v$.

Réciproquement supposons qu'il y ait majoration harmonique de u dans ω. Si E est un compact dans ω, on montrera que dans $\omega - E$, u admet une plus petite majorante harmonique dont le prolongement par u sur E est quasi sousharmonique dans ω; et la régularisée w admet dans ω la même plus petite majorante harmonique $\overset{*}{u}$ que u.

Soit μ_1 la mesure associée à w, identique à μ sur l'intérieur $\overset{\circ}{E}$ de E, nulle hors E. Reprenons des domaines croissants $\omega_n \left[\overline{\omega_n} \subset \omega, \omega_n \to \omega\right]$. Il est facile de voir que dans ω_n contenant E

$$w(M) = \int_E G_{\omega_n}(M, P)\, d\mu_1(P) + H^{\omega_n}_{\overline{\varphi}_n}$$

d'où

$$w(M) = \int_E G_\omega(M, P)\, d\mu_1(P) + \overset{*}{u}(M),$$

puis

$$w(M) \leq \int_{\overset{\circ}{E}} G_\omega(M, P)\, d\mu(P) + \overset{*}{u}(M).$$

(63) Sans utiliser le résultat pour ω borné, nous donnons une démonstration directe et en partie nouvelle.

Vu l'arbitraire de E, $\int_\omega G_\omega(M, P)\, d\mu(P)$ est finie quasi-partout et

$$u(M) \geqq \int_\omega G_\omega(M, P)\, d\mu(P) + \overset{*}{u}(M).$$

Mais alors, d'après la première partie, $u - \int_\omega$ est définie quasi-partout et y vaut une majorante harmonique de u, qui est donc égale à $\overset{*}{u}$, d'où le théorème.

Remarque. — Si $\tau \geqq 3$ la fonction de Green de R_τ est $h(MP)$ et le théorème précédent fournit les résultats du n° 4 pour $\tau \geqq 3$.

21. *Fonction de Green prolongée et majorantes harmoniques.* — Soit P fixé dans ω ouvert de $\overline{R_\tau}$. $G_\omega^P(M)$ est une fonction de M dans ω, qui, prolongée par zéro hors ω devient quasi-sousharmonique dans $\overline{R_\tau} - P$. La régularisée dans $\overline{R_\tau} - P$ définira la *fonction de Green prolongée*, notée encore $G_\omega^P(M)$.

Soit Q *extérieur à* ω *ou point-frontière régulier.* — Pour $M \in \omega$, on a vu que

$$G_\omega^P(M = h_Q^P(M) - \int h_Q^P(S)\, d\mu_M(S) \tag{15}$$

ou encore,

$$G_\omega^P(M) = h_Q^P(M) - \int h_Q^M(S)\, d\mu_P(S). \tag{15'}$$

La seconde intégrale est un potentiel - h_Q, qui pour M extérieur à ω ou point-frontière régulier représente la valeur en P d'une certaine fonction de Wiener et vaut alors d'après le n° 17 $h_Q^M(P)$ ou $h_Q^P(M)$. Il s'ensuit aisément que l'*expression* (15') *de* $G_\omega^P(M)$ *est encore valable pour la fonction de Green prolongée et* M *quelconque* $\neq Q$. Elle met en évidence que $-\mu_P$ est la mesure associée à la fonction sousharmonique de M, $G_\omega^P(M)$ hors P et Q et que $G_\omega^P(M)$ est le potentiel-h_Q de la distribution ν_P hors Q de total zéro définie par $+1$ en P et $-\mu_P$ sur la frontière du domaine composant de ω contenant P. Tout cela généralise des résultats bien connus (pour ω borné, Q en $\mathcal{R}_\tau$) de Vasilesco-Frostmann.

Application. — Soit u sousharmonique dans Ω ouvert différent de $\overline{R_\tau}$ et ω ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Si μ est la mesure $\leqq 0$ associée à u, nous allons voir que, pour $P \in \omega$

$$u(P) = \int_{\overline{\omega}} G_\omega^P(M)\, d\mu(M) + H_u^\omega(P), \tag{16}$$

où G_ω est la fonction de Green généralisée et H_u^ω la fonction de Wiener *dite aussi meilleure majorante harmonique de u* dans ω (notée encore $\overline{u}$).

En effet soit ω_1 ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \Omega$ et Q hors $\overline{\omega}_1$.

Dans ω_1,

$$u(S)=\int_{\omega_1} h_Q^S(M)\,d\mu(M)+w(S)$$

où w est harmonique.

Dans ω,

$$H_u^{\omega}(P)=\int_{\overset{*}{\omega}} u(S)\,d\mu_P(S)$$

d'où en y substituant l'expression de $u(S)$ et permutant les intégrations

$$H_u^{\omega}(P)=\int_{\omega_1} d\mu(M)\int_{\overset{*}{\omega}} h_Q^S(M)\,d\mu_P(S)+w(P).$$

Le second membre de (16) vaut donc

$$\int_{\omega_1}\left[G_{\omega}^P(M)+\int_{\overset{*}{\omega}} h_Q^S(M)\,d\mu_P(S)\right]d\mu(M)+w(P),$$

où le crochet, d'après (15') vaut bien $h_Q^P(M)$, d'où le résultat ([64]).

Comparant enfin (14) et (16) il vient pour les majorantes de u dans ω

$$\bar{u}(P)-\overset{*}{\bar{u}}(P)=\int_{\overset{*}{\omega}} G_{\omega}^P(M)\,d\mu(M)\qquad (P\in\omega). \tag{17}$$

Cela est évident aux points P où u est finie. La conclusion est générale puisque les deux membres sont harmoniques.

On remarquera que les formules (12) et (13) sont des cas particuliers de (16) et (14).

22. *Fonctions sousharmoniques et potentiels* — h_Q *dans* $\overline{R_\tau}-Q$, $(Q\neq\mathcal{R}_\tau)$. — On adaptera sans difficultés les raisonnements du n° 4.

Si u est harmonique dans $\overline{R_\tau}-Q$, elle admet un développement

$$u=K+\sum_1^{\infty}\frac{Y_n^{(1)}(M)}{\overline{QM}^{n+\tau-2}}.$$

([64]) Le calcul est inspiré de celui de Frostman démontrant l'égalité de $\bar{u}$ et $\overset{*}{\bar{u}}$ pour un domaine borné ω sans points-frontière irréguliers (*Aeta Szeged*, t. 8, 1937, p. 202). J'ai déjà utilisé une variante de ce raisonnement pour établir la formule (17) dans le cas de ω borné (*Bull. Ac. royale de Belgique*, t. 24, 1938, p. 427). Voici sommairement une autre variante, toujours basée sur une interversion d'intégrations, et où se présente normalement l'utilisation du résultat général suivant :

Soit ν une mesure généralisée sur un compact de E de $\overline{R_\tau}-Q$ de potentiel-h_Q nul au voisinage de Q. Si w est harmonique dans un ouvert contenant à la fois E et les domaines composants de CE ne contenant pas Q, $\int w\,d\nu=0$ (explicité par Choquet et Deny dans le cas classique de Q en $\mathcal{R}_\tau$).

Alors

$$\int_{\overline{\omega}} G_{\omega}^P(M)\,d\mu(M)=\int u\,d\nu_P$$

et il suffira de décomposer le second membre.

Pour que ce Σ soit nul, c'est-à-dire que u se réduise à une constante, il faut et il suffit que u soit bornée dans un sens; d'une manière générale si

$$r^s \mathfrak{M}_u^r(Q) \to 0 \qquad (\text{pour } r \to 0), \qquad Y_u^{(1)} = 0 \qquad \text{pour } n + \tau - 2 \geqq s.$$

Si u est sousharmonique dans $\overline{R_\tau} - Q$, on considérera la courbe des $\mathfrak{M}_u^r(Q)$, convexe et croissante en $t = h(r)$; l'harmonicité de u équivaut à l'existence d'une majorante harmonique à la nullité du flux de u en Q ou encore à ce que $\lim_{r \to 0} \mathfrak{M}_u^r(Q)$ soit finie; la constance de u équivaut à ce que u soit bornée supérieurement, ou encore que $\mathfrak{M}_u^r(Q)$ soit bornée.

Potentiels-h_Q. — Examinons pour le potentiel-h_Q d'une mesure $\mu \leqq 0$ les particularités de cette fonction sousharmonique u et de la courbe en t de $\mathfrak{M}_u^r(Q)$.

Les pentes à droite et à gauche valent $-\mu(\Delta_Q^r)$ et $-\mu(\overline{\Delta_Q^r})$;

$\mathfrak{M}_u^r(Q) + h(r)\,\mu(\Delta_Q^r)$ vaut le potentiel en $\mathcal{R}_\tau$ des masses hors Δ_Q^r, donc tend vers zéro pour $r \to 0$; autrement dit la courbe des moyennes en t admet à droite une branche de *pente asymptotique* $\beta \geqq 0$ *finie* (c'est-à-dire que $\frac{\mathfrak{M}_u^r(Q)}{h(r)}$ est bornée supérieurement pour $r \to 0$, et cela implique l'existence d'une majorante harmonique au voisinage de Q et aussi que la masse totale soit finie) *avec asymptote passant par l'origine*. D'ailleurs

$$\limsup_{M \to Q} \frac{u(M)}{h(QM)} < +\infty,$$

comme on le voit aussitôt sur l'intégrale-potentiel par décomposition de h_Q et cette limite supérieure vaut donc β.

Pour que u souharmonique dans $\overline{R_\tau} - Q$ soit un potentiel-h_Q de masses $\leqq 0$ à une fonction harmonique près w, il faut et il suffit que la courbe des $\mathfrak{M}_u^r(Q)$ en t admette à droite une asymptote d'ordonnée à l'origine λ finie ([65]); w sera une constante si (et seulement si) $r^s \mathfrak{M}_u^r(Q) \to 0$ $(r \to 0)$ pour un (ou tout) s tel que $\tau - 2 < s \leqq \tau - 1$ et la constante vaut alors l'ordonnée à l'origine λ.

([65]) On remplacera u par son intégrale-$\mathfrak{T}$ dans un Δ_Q^r; la condition entraîne que les masses associées voisines de Q, qui sont les mêmes, donnent un potentiel fini en $\mathcal{R}_\tau$; il y a donc bien un potentiel (fini quasi-partout) pour la mesure associée de la fonction donnée u.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE ET UNIÈME.

Pages.

Théorie nouvelle des familles complexes normales. Application à l'étude des fonctions algébroïdes, par M. *Jacques Dufresnoy*..... 1

Sur une équation différentielle du premier ordre et du second degré, par M. *Jean Chazy*..... 45

Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation, par M. *J. Haag*. 73

Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères, par M. *Paul Vincensini*..... 119

Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, par M. *Henri Cartan*.... 149

Configurations récurrentes, par M. *Bertrand Gambier*..... 199

Dérivées et différences des fonctions de variables réelles, par M. *Jean Dieudonné*.. 231

Variations sur un thème de H. Poincaré, par M. *François Châtelet*..... 249

Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, par M. *Marcel Brelot*..... 301

TABLE DES MATIÈRES..... 333